CAPÍTULO 8

Raciocínio Matemático e Seus Entendimentos Essenciais: Uma Análise de Tarefas Matemáticas em um curso de Formação Continuada

Loryane Santos de Oliveira
André Luis Trevisan

INTRODUÇÃO

Diversos autores discutem o conceito de raciocínio matemático (RM), destacando sua importância para a aprendizagem da Matemática e a necessidade de incentivá-lo ao longo de toda a escolarização, desde os anos iniciais (Lannin, Ellis, Elliot, 2011; Mata-Pereira, Ponte, 2018; Stylianides, 2009). Para Russeal (1999, p. 1), o RM é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" e é "a ferramenta para compreender a abstração"[1]. Aliseda (2003) identifica uma relação estreita entre o RM e a inferência lógica, caracterizada por certezas e regularidades. Isto significa que há uma conexão entre premissas, conclusões e a irrefutabilidade das conclusões obtidas.

Compreender o que significa raciocinar matematicamente e identificar quais ações e práticas pedagógicas favorecem esse desenvolvimento são questões relevantes para a formação de professores, bem como para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Considerando a importância deste assunto, torna-se indispensável, tanto na formação inicial quanto na formação continuada de professores que ensinam Matemática, aprimorar seu conhecimento profissional sobre o RM, em especial contribuindo para que os estudantes possam "investigar, explicar e justificar, com ênfase na argumentação matemática" (Brasil, 2018, p.519).

Para criar oportunidades de desenvolvimento do RM, os professores precisam organizar ambientes de ensino e aprendizagem que considerem as diferentes maneiras pelas quais diferentes pessoas podem pensar e resolver problemas (Wood, 1997). Pensando na aprendizagem profissional dos professores que ensinam Matemática em uma perspectiva de ação coletiva, Ball e Cohen (1999)

[1] Todas as citações diretas de obras em língua estrangeira são traduções livres dos autores.

e Ball, Ben-Peretz e Cohen (2014) destacam a importância de promover oportunidades de aprendizagem para que eles aprendam uns com os outros, considerando isso como um meio fundamental para superar o isolamento que muitas vezes permeia o trabalho docente. Essa abordagem, sem dúvida, favorece a expansão das oportunidades para que eles possam aprender de forma coletiva e colaborativa.

Ponte (2005) enfatiza a importância de tarefas exploratórias, que visam incentivar a descoberta e a construção do conhecimento pelos estudantes. Os ambientes de aprendizagem fundamentados em exploração oferecem aos alunos um conjunto diversificado de atividades que envolvem conceitos matemáticos, proporcionando-lhes oportunidades para experimentar, discutir, formular hipóteses, generalizar, comunicar suas ideias e tomar decisões informadas.

Diversos estudos apontam as tarefas exploratórias como fundamentais para o desenvolvimento do RM, visto que promovem comunicação, conexões matemáticas e argumentação (Ponte, 2005; Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). Diferente de uma aula "tradicional", esse tipo de abordagem é caracterizado pelo fato de o professor não explicar tudo, deixando a descoberta e construção do conhecimento por conta do aluno (Caberlini; Garcia, 2016), promovendo "uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação e facilita, igualmente, o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas" (Henriques, 2010, p. 373).

Dessa forma, o ensino em um ambiente de exploração matemática exige do professor um papel ativo que vai além da simples identificação e seleção de tarefas para a sala de aula. Segundo Stein *et al*. (2008), a escolha de uma tarefa apropriada é fundamental, pois carrega consigo uma oportunidade específica de aprendizagem. No entanto, após a seleção, é essencial que o professor analise como maximizar as potencialidades dessa tarefa em conjunto com os alunos, além de se preparar para enfrentar a complexidade que essa exploração traz ao ambiente de sala de aula.

Nesse contexto, o presente capítulo, é parte da pesquisa de mestrado da primeira autora, sob orientação do segundo autor, que teve por objetivo analisar e discutir os conhecimentos profissionais de professores em um contexto de formação continuada[2], com foco na promoção do RM e na aplicação dos nove Entendimentos Essenciais propostos por Lannin, Ellis e Elliott (2011). Em especial, detalhamos e exemplificamos esses nove entendimentos, que servem como meio para instrumentalizar o professor que ensina Matemática a explorar e refletir sobre suas práticas de ensino, oferecendo suporte teórico e prático para que possam elaborar tarefas com potencial para o desenvolvimento do RM em diferentes níveis de escolaridade.

O capítulo está estruturado em 3 seções, além desta introdução, na qual foram apresentados os fatos que motivaram o desenvolvimento da pesquisa. São apresentados os nove Entendimentos

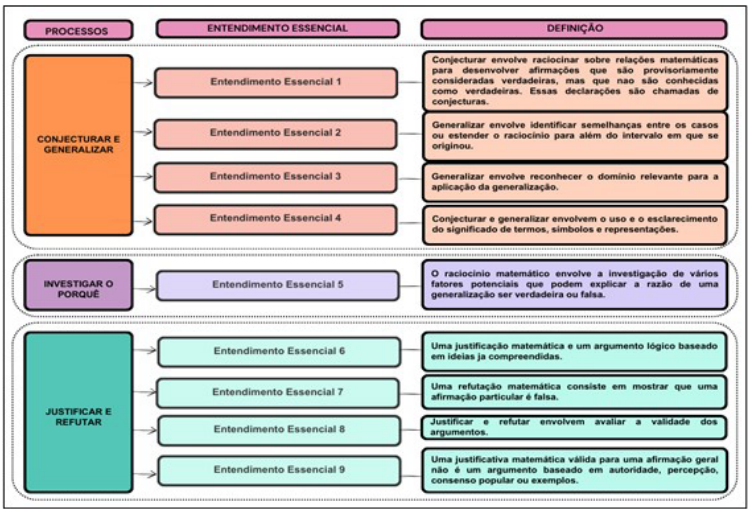
[2] Projeto aprovado no comitê de ética da UTFPR conforme número do Parecer: 5.161.835.

Essenciais do RM, conforme proposto por Lannin, Ellis e Elliott (2011), detalhando e exemplificando cada entendimento, destacando seu papel como instrumento para apoiar professores no ensino de Matemática, permitindo que explorem e reflitam sobre suas práticas de ensino. Além disso, oferece suporte teórico e prático para a elaboração de tarefas com potencial para o desenvolvimento do RM em diferentes níveis de escolaridade.

São exploradas as Tarefas Matemáticas desenvolvidas no processo formativo, que fazem parte da dissertação da primeira autora. São apresentados registros de prática, transcrições de áudios e imagens que ilustram o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula. Essa abordagem permite analisar como os professores, no contexto real de ensino e aprendizagem, aplicam os Entendimentos Essenciais, contribuindo para a reflexão sobre suas práticas pedagógicas e o impacto dessas tarefas no desenvolvimento do RM.

REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011), o RM envolve uma variedade de aspectos organizados em nove Entendimentos Essenciais (figura 1), que influenciam diretamente a aprendizagem da matemática. O modelo proposto pelos autores baseia-se em um conceito amplo de RM, definido como *uma grande ideia* que engloba os processos de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, desenvolver e avaliar argumentos.



A seguir, são destacadas algumas características essenciais para a compreensão dos nove Entendimentos Essenciais propostos por Lannin, Ellis e Elliot (2011).

Entendimento Essencial 1: Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas cuja veracidade não é conhecida. Essas declarações são chamadas de conjecturas.

Com base em seus conhecimentos e habilidades matemáticas, os alunos elaboram afirmações sobre um fato matemático, que podem ser verdadeiras ou falsas. Após uma investigação subsequente, esses alunos podem formular uma justificativa, que será aceita ou refutada, confirmando ou não a veracidade da conjectura formulada. Outra característica fundamental é que as conjecturas podem ser expressas de diversas formas, tanto por escrito quanto verbalmente, e podem ou não incluir generalizações.

Entendimento Essencial 2: Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio para além do intervalo em que se originou.

Generalizar pode envolver ou não a formulação de uma regra ou expressão algébrica. Isso ocorre porque a generalização está relacionada à identificação de semelhanças entre os casos observados em uma determinada situação. Os autores explicam que o processo de generalização pode ocorrer de duas maneiras: (a) pela identificação de elementos comuns e (b) pela extensão do raciocínio além do intervalo onde originalmente foram identificados esses elementos comuns.

Entendimento Essencial 3: Generalizar envolve reconhecer o domínio relevante para a aplicação da generalização.

Conforme Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 23), "generalizar envolve dois tipos de atividades– refletir sobre um relacionamento, ideia, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática para identificar semelhanças e estender o raciocínio além do domínio original". Portanto, é fundamental que os alunos desenvolvam a habilidade de identificar o domínio e os limites relevantes para formular uma generalização, já que cada generalização se aplica a um domínio específico. Nesse contexto, é natural que os alunos analisem e formulem generalizações a partir de um determinado contexto. No entanto, segundo os autores, é essencial que os alunos explicitem os limites das generalizações, permitindo uma melhor compreensão e possibilitando a validação ou refutação da generalização apresentada.

Entendimento Essencial 4: Conjecturar e generalizar envolvem o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.

Considerando que a linguagem matemática envolve o uso de símbolos, termos e diversas representações, é fundamental que o professor tenha um certo cuidado ao desenvolver atividades de conjectura e generalização. Deve-se prestar atenção especial às afirmações apresentadas aos alunos, garantindo que sejam claras e precisas para facilitar a compreensão e evitar possíveis mal-entendidos. Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 26) destacam que "esclarecer a linguagem matemática, os símbolos e as representações é uma parte essencial do raciocínio do aluno", pois diferentes interpretações de um símbolo, termo ou propriedade matemática podem surgir entre os alunos. À medida que desenvolvem conjecturas e generalizações, os alunos frequentemente introduzem termos que

precisam ser esclarecidos conforme validam ou refutam essas conjecturas e generalizações. Portanto, é fundamental compreender e analisar os termos usados pelos alunos durante o desenvolvimento de seu raciocínio, já que interpretações equivocadas podem ocorrer dependendo do significado que eles atribuem. Esse processo exige uma exploração mais ampla para evitar mal-entendidos.

Entendimento Essencial 5: O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar a razão de uma generalização ser verdadeira ou falsa.

Conforme destacado por Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 30), "investigar por que uma afirmação é verdadeira ou falsa faz parte do desenvolvimento do raciocínio matemático, pois esse processo contribui para validar uma justificativa ou refutar conjecturas e generalizações". Os autores enfatizam que essa investigação pode ocorrer ao analisar os fatores que explicam por que uma afirmação matemática é verdadeira, dando "atenção a características específicas que fornecem insights sobre os relacionamentos que podem confirmar ou negar uma generalização" (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 30). Além disso, os alunos podem explicar o motivo pelo qual uma afirmação geral é válida ou inválida, recorrendo a várias explicações para fundamentar sua justificativa.

Entendimento Essencial 6: Uma justificação matemática e um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.

Com base no conhecimento prévio e nas declarações gerais dos alunos que embasam suas generalizações, eles podem formular justificativas, válidas ou não, dependendo de como lidam com a argumentação para chegar a uma conclusão. Nesse contexto, destaca-se que para apresentar uma justificativa válida, os alunos precisam fornecer uma sequência lógica de afirmações, cada uma fundamentada em conceitos ou entendimentos previamente estabelecidos como verdadeiros, conduzindo a uma conclusão. Essa justificativa deve demonstrar que a generalização é verdadeira para todos os casos no domínio, apoiando-se em relações subjacentes consistentes. Assim, a elaboração de uma justificativa vai além da mera verificação da validade de uma afirmação, exigindo uma investigação sobre a verdade de uma conjectura ou generalização além do domínio em questão. A justificativa "deve abranger todos os aspectos do domínio" (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p.35) utilizando uma linguagem geral que demonstre sua validade e aplicabilidade em múltiplos exemplos específicos.

Entendimento Essencial 7: Uma refutação matemática consiste em mostrar que uma afirmação particular é falsa.

Considerando que a refutação e a validação constituem etapas relevantes no processo de argumentação matemática para formular uma justificativa e determinar a veracidade de uma conjectura, é fundamental que os alunos reconheçam a importância dos contraexemplos e seu papel na sustentação do argumento de que uma declaração específica é falsa. Nesse contexto, Lannin, Ellis e Elliot

(2011, p. 43) afirmam que "um único contra exemplo pode invalidar a conjectura" e também uma generalização.

Entendimento Essencial 8: Justificar e refutar envolvem avaliar a validade dos argumentos.

Criar e analisar argumentos, explicar a veracidade das conjecturas, aprimorar as conjecturas com base nos argumentos que as sustentam, compreender o uso de definições e contra exemplos para demonstrar que as conjecturas são falsas, constituem aspectos fundamentais na justificação matemática. Isso implica em identificar e corrigir erros ou equívocos em uma justificativa, seja na conclusão ou em partes específicas da declaração. Avaliar uma justificativa pode incluir o uso de diferentes formas de representação matemática para mostrar a falsidade de uma conjectura, reformular a conjectura para torná-la mais precisa ou verdadeira, revisar a conjectura para garantir sua coerência, além de uma análise detalhada dos argumentos que sustentam conclusões válidas.

Entendimento Essencial 9: Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Considerando que muitas vezes os alunos fundamentam suas justificativas em conceitos matemáticos apresentados pelo professor, especialmente ao utilizar exemplos para testar conjecturas, é essencial que compreendam que a validade de uma generalização não deve depender apenas desses conceitos, de testes de exemplos ou de opiniões sobre sua veracidade. No processo de justificação, os alunos devem explorar as relações matemáticas que sustentam e garantem a validade da generalização, apresentando argumentos que demonstrem que uma relação matemática é válida para todos os casos possíveis. Lannin; Ellis e Elliot (2011, p. 53) destacam que "tomar uma decisão matemática com base na popularidade de uma ideia, em vez de um argumento matemático, não constitui uma justificativa matematicamente adequada".

Para que os estudantes mobilizem diferentes processos de RM, é essencial que o professor compreenda os nove Entendimentos Essenciais. A partir desse conhecimento, ele pode criar estratégias e organizar práticas de ensino que favoreçam a exploração, a troca de ideias e a validação de conjecturas. Nesse contexto, o professor atua como mediador, auxiliando os alunos na identificação de possíveis falhas e promovendo a construção coletiva do conhecimento.

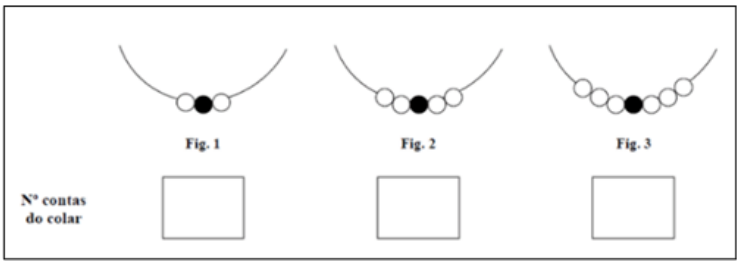
Com o objetivo de ilustrar esses Entendimentos Essenciais, apresentamos neste artigo três tarefas que fizeram parte do processo formativo, bem como registros de prática gerados nas aulas conduzidas pelas professoras. Em seguida, trazemos uma síntese de cada Entendimento Essencial, acompanhada de exemplos relacionados às tarefas matemáticas desse contexto.

Tarefas Matemáticas – Ilustrações e registros do processo formativo

TAREFA 1–"Os colares"

Ana está fazendo um colar, com miçangas pretas e brancas, e as figuras abaixo mostram as etapas 1, 2 e 3 dessa construção.

Figura 2: Tarefa "Os colares"



Fonte: Adaptada–Pedro (2013)

1. Indique acima o número total de miçangas de cada figura.
2. Continuando essa sequência de colares, quantas miçangas teriam, no total, o colar correspondente à figura seguinte (figura 4).
3. E quantas miçangas teria o colar correspondente a figura 8?
4. Descubra quantas miçangas teria, no total, o colar correspondente à figura 19, sem desenhar.
5. Existe algum colar na sequência que tenha 55 miçangas? Explique detalhadamente o teu raciocínio ou (Explique como você pensou):
6. Descreva uma regra que lhe permita determinar o número total de contas de qualquer figura da sequência.

Para análise das discussões nos pequenos grupos, elencamos registros de prática (episódios em áudio e protocolos do grupo), enquanto discutem a tarefa dos "Colares".

Figura 3 - Transcrição de áudio da discussão de um dos grupos de estudantes

Professora: Ahhh. Então vamos l;a, deixa eu ver, cê escreveu o que que você pensou, isso. Então, na etapa quatro, cês fizeram como? Cês contaram no dedo, desenharam, que que foi?
Davi: A gente fez a mesma coisa, na verdade não foi contando, a gente pensou nesse negócio que dá duas unidades a mais de miçangas.
Professora: Então do sete pro nove , cês fizeram o quê?
Davi: Mais dois.
Professora: Mais dois, então no caso cês somaram.
Davi: É, fazendo a sequência a gente descobriu todas, só falta essa daqui (se referindo ao exercício 6) que a gente não tá sabendo como explicar, mas a gente vai discutir aqui, vai pensar como vai explicar ai.
Professora: Ah então. E da etapa … quantas miçangas seriam o colar na etapa oito cês chegaram quantas?
Davi: Dezoito!
Professora: Dezoito miçangas teria? Por que daí dezoito?
Davi: Por causa que na etapa quatro aqui é nove miçangas e é oito … o dobro de quatro.
Professora: Ah, o dobro de quatro.
Davi: É daí a gente pensou em pegar a resposta de quatro e dobrar daí a gente saberia de oito.
Professora: Ah, daí você ia dobrar a resposta.
Davi: É.
Professora: Mas isso daí tá dando certo pra todos?
Davi: Sim.
Professora: Sim?
Davi: O que a gente chegou a discutir sim.
Professora: Sim? Vamos pensar assim, descubra quantas miçangas teriam no total o colar na etapa dezenove,sem desenhar. Você tá falando pra mim então que é o dobro. Qual é o dobro de um ?

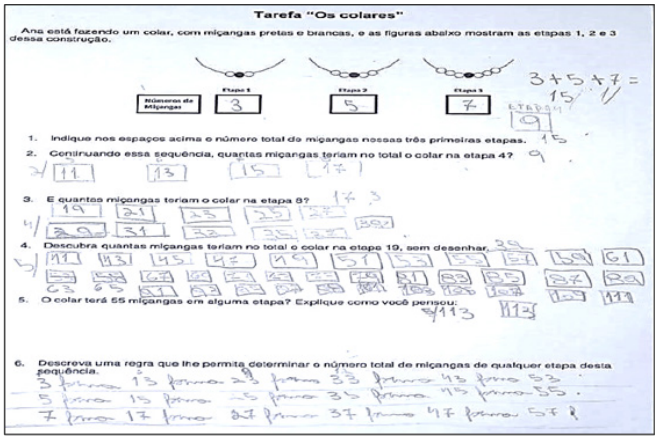
Fonte: Grupo de Pesquisa

Figura 4 - Transcrição de áudio da discussão de um dos grupos de estudantes

Davi: De um ?
Professora: É.
Davi: Dois.
Professora: Dois. O três e o cinco que você achou aqui, eles são o dobro um do outro?
Davi: Não.
Professora: E por que que então você colocou? Fala de novo o que você colocou na etapa quatro para oito. Pausa (Alunos pensam)
Professora: Mas e aí? Não, que que cê acha que tá bom? Quem é o dobro de dois?
Davi: É.
Professora: Quem é o dobro de dois? Qual é o dobro de dois?
Davi: Quatro.
Professora: Quatro. Quantas micangas tem aqui?
Davi: Cinco.
Professora: Nooo e quantas miçangas você colocou na quatro?
Davi: Nove.
Professora: Nove! O cinco e o nove são o dobro um do outro? E aí? Como que a gente pode fazer agora? Vamos pensar, cê falou que ta indo de dois em ?
Davi: Dois.
Professora: Dois. E aí, como que cê pode ?
Davi: (inaudível) Ir contando de dois em dois até chegar no número?
Professora: No número, contando de dois em dois?
Davi: É … contando de dois em dois até chegar …
Professora: Então coloca aí que daí eu já volto aqui.

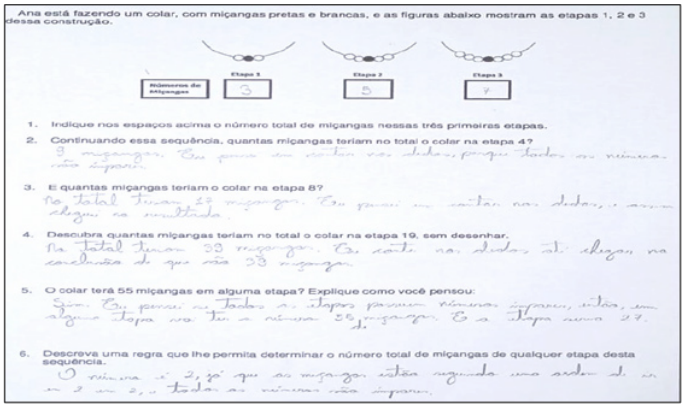
Fonte: Grupo de Pesquisa

Figura 5 - Protocolo 1 escrito pelo grupo de estudantes



Fonte: Grupo de Pesquisa

Figura 6 - Protocolo 2 escrito pelo grupo de estudantes



Fonte: Grupo de Pesquisa

TAREFA 2–Propagação de Fake News usando a técnica de dobradura

Objetivo: Utilizar a técnica de dobradura para estimar a manifestação da Fake News na situação descrita, considerando o controle exponencial ao longo dos dias.

Habilidade: (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função

Descrição: Em uma escola localizada em São João do Triunfo localizada no sudeste do Paraná, uma Fake News de que a professora de Matemática tinha como hábito reprovar os alunos espalha rapidamente.

- No primeiro dia, um aluno conta a notícia falsa a outros dois alunos.
- No segundo dia, cada um dos outros dois alunos conta a notícia a outros dois, e assim por diante, sempre no intervalo de um dia.

A partir do que foi apresentado vamos usar a técnica de dobradura para estimar a manifestação da Fake News na situação descrita acima.

Dobraduras:

- Pegue uma folha de papel e dobre-a ao meio.
- Dobre novamente ao meio.
- Desdobre a última dobra e verifique as marcas dobradas no papel.
- Repita o processo dobrando a folha mais vezes.
- Continue dobrando até representar a situação apresentada na tarefa acima.
- Abra a dobradura e observe o resultado.

TAREFA:

1. Responda às seguintes perguntas:

a) Quantas dobras é preciso fazer para representar no papel em forma de dobradura a quantidade de alunos que receberam a notícia falsa no primeiro dia?

b) Quantas dobras são necessárias fazer para representar no papel a quantidade de alunos que receberam a Fake News no segundo dia?

c) No terceiro dia, quantos alunos irão receber a notícia falsa?

d) Quantos alunos receberam essa notícia durante o sétimo dia? E durante o décimo dia?

e) Registre/organize as suas estimativas e descreva como você a encontrou. Descreva o que você observou?

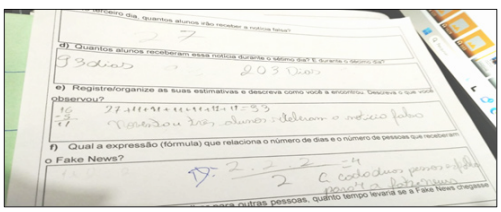
f) Qual a expressão (fórmula) que relaciona o número de dias e o número de pessoas que receberam o Fake News?

g) E se a notícia se espalhar para outras pessoas, quanto tempo levaria se a Fake News chegasse para 4096 pessoas?

h) Faça um gráfico para ilustrar o crescimento das Fake News ao longo dos dias.

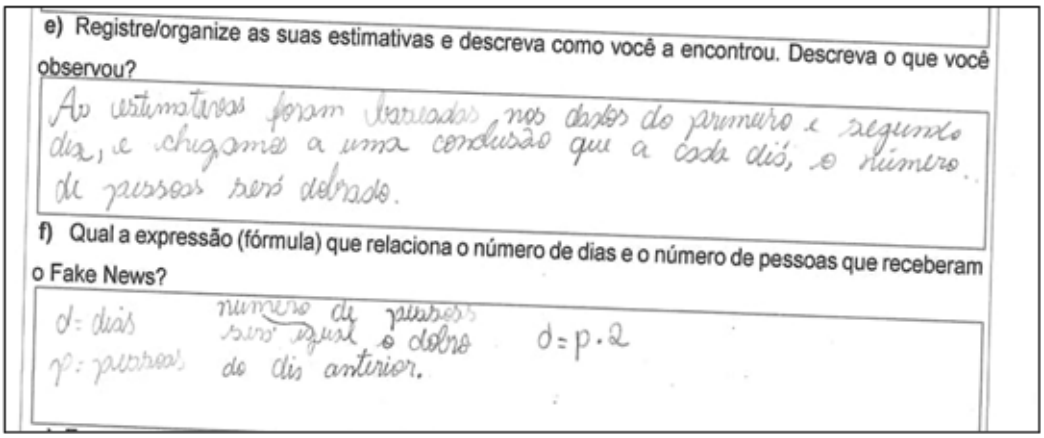
i) Análise e dê exemplos de como a técnica de dobradura pode ser usada para ilustrar outras situações semelhantes?

Figura 6 - Protocolo escrito dos estudantes



Fonte: Grupo de Pesquisa

Figura 7 - Protocolo escrito dos estudantes



Fonte: Grupo de Pesquisa

TAREFA 3 – Par com Par? impar com impar ?

Figura 8 - Tap produzida pelas professoras

Avalie como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.Em seguida, explique que justificativas poderiam ser apresentadas por estudantes em diferentes níveis de escolaridade.

A soma de dois números pares é par.
A soma de dois números ímpares é ímpar.
Se a soma de dois números é par, eles são pares.

Nesta seção, apresenta-se uma síntese de cada Entendimento Essencial, articulada a exemplos de tarefas matemáticas presentes no produto educacional "O Raciocínio Matemático e seus Entendimentos Essenciais". Esse material foi desenvolvido a partir da dissertação de mestrado da primeira autora, intitulada "Conhecimentos Profissionais de Professores em um Contexto de Formação Continuada a Respeito do Raciocínio Matemático", (Oliveira, 2024), realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Entendimentos essenciais e sua relação com as tarefas matemáticas.

Entendimento Essencial 1: Conjecturar consiste em analisar relações matemáticas para formular afirmações que são consideradas provisoriamente verdadeiras, embora ainda não tenham sido comprovadas como tais. Essas afirmações são conhecidas como conjecturas.

As conjecturas podem ser expressas de diversas formas, tanto por escrito quanto verbalmente, e podem ou não incluir generalizações.

- Por exemplo, na Tarefa 1 uma conjectura elaborada pelos estudantes foi que o número de miçangas pretas é sempre o mesmo.

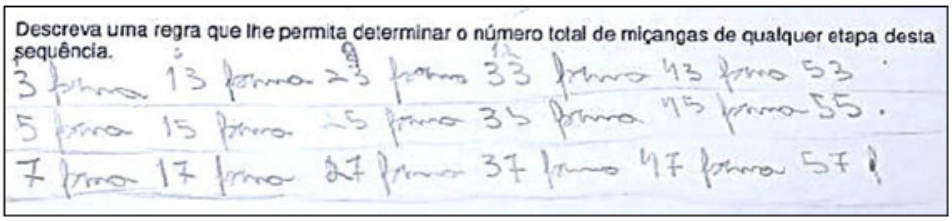
- Na Tarefa 2, os estudantes poderiam conjecturar que a quantidade de dobras é sempre um número par. Outra conjectura seria que, em algum momento haveria dez dobras na folha, pois 10 é um número par. Essa última afirmação não é correta, o que poderia, ou não, levar os estudantes a refutá-la após realizar uma investigação subsequente.

Entendimento Essencial 2: Generalizar pode envolver ou não a formulação de uma regra ou expressão algébrica. Isso ocorre porque a generalização está relacionada à identificação de semelhanças entre os casos observados em uma determinada situação.

O processo de generalização pode ocorrer de duas maneiras:

a) pela identificação de elementos comuns, por exemplo, reconhecendo que o número de miçangas aumenta em duas unidades a cada etapa, no caso da Tarefa 1. Ou que o número de dobras duplica a cada etapa, no caso da Tarefa 2.

b) pela extensão do raciocínio além do intervalo onde originalmente foram identificados esses elementos comuns.



No protocolo descrito acima, o estudante faz uma extensão do seu raciocínio concluindo que se havia uma etapa com 3 miçangas, em algum momento haveria 13, em outro 23, em outro 33 e assim sucessivamente. O mesmo ocorre em uma etapa com 5, outra com 15, outra com 25, ou ainda com 7, 17, 27 miçangas.

Entendimento Essencial 3: Generalizar envolve reconhecer o domínio relevante para a aplicação da generalização.

Conforme Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 23), "generalizar envolve dois tipos de atividades–refletir sobre um relacionamento, ideia, representação, regra, padrão ou outra propriedade matemática para identificar semelhanças e estender o raciocínio além do domínio original".

É fundamental que os alunos desenvolvam a habilidade de identificar o domínio e os limites relevantes para formular uma generalização, já que cada generalização se aplica a um domínio específico. Nesse contexto, é natural que os alunos analisem e formulem generalizações a partir de um determinado contexto. No entanto, segundo os autores, é importante que os alunos explicitem os limites das generalizações, permitindo uma melhor compreensão e possibilitando a validação ou refutação da generalização apresentada.

Professora: E da etapa 8, quantas miçangas seriam colar na etapa oito, vocês chegaram quantas?
Davi: Dezoito.
Professora: Dezoito miçangas teria? Por que daí dezoito?
Davi: Por causa que na etapa quatro aqui é nove miçangas e é oito é... o dobro de quatro.

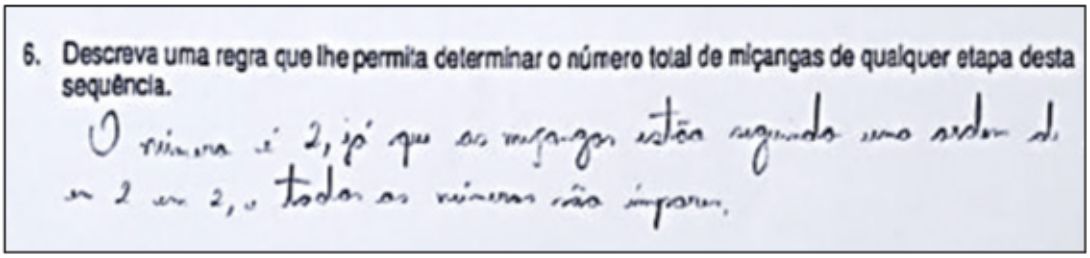
Nesse trecho de discussão entre a professora e o estudante Davi ele explica que pensou que na etapa 8 haveria 18 miçangas. Para ele, quando dobramos o número da etapa o número de miçangas também dobra, matematicamente essa conjectura está incorreta para sequência presente na tarefa. Porém, ela é válida para alguns outros tipos particulares de sequências. O contato desse estudante com essas outras sequências pode tê-lo levado a estender esse raciocínio para essa tarefa, porém, sem analisar o domínio de sua validade.

Entendimento Essencial 4: Conjecturar e Generalizar envolvem o uso e esclarecimento de significado de termos, símbolos e representações.

É fundamental que o professor tenha um certo cuidado ao desenvolver atividades de conjectura e generalização. Deve-se prestar atenção especial às afirmações apresentadas aos alunos, garantindo que sejam claras e precisas para facilitar a compreensão e evitar possíveis mal-entendidos. Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 26) destacam que "esclarecer a linguagem matemática, os símbolos e as representações é uma parte essencial do raciocínio do aluno", pois diferentes interpretações de um símbolo, termo ou propriedade matemática podem surgir entre os alunos. À medida que desenvolvem conjecturas e generalizações, os alunos frequentemente introduzem termos que precisam ser esclarecidos conforme validam ou refutam essas conjecturas e generalizações.

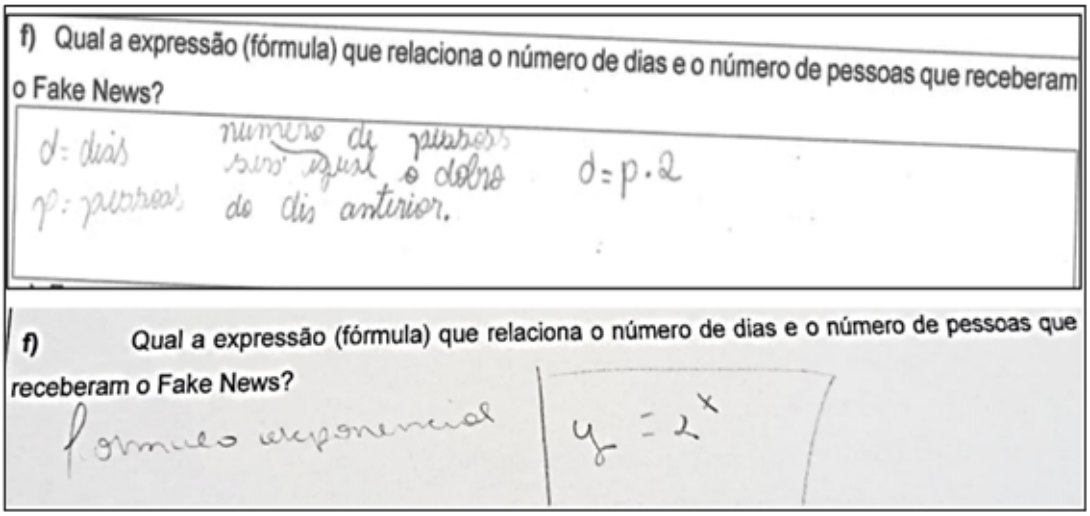
Portanto, é fundamental compreender e analisar os termos usados pelos alunos durante o desenvolvimento de seu raciocínio, já que interpretações equivocadas podem ocorrer dependendo do significado que eles atribuem. Esse processo exige uma exploração mais ampla para evitar mal-entendidos.

Por exemplo, nas Tarefas 1 e 2 os alunos são convidados a descobrir o padrão e generalizar, para que talvez cheguem a uma fórmula para o n-ésimo termo da sequência. Assim, usam termos e símbolos que os ajudam a formular conjecturas válidas e, talvez, generalizá-las. No protocolo descrito a seguir, o estudante fez uso da linguagem natural para expressar duas generalizações: os termos da sequência aumentam de duas em duas unidades, e os termos da sequência são sempre números ímpares.


6. Descreva uma regra que lhe permita determinar o número total de miçangas de qualquer etapa desta sequência.

O número é 2, já que as miçangas estão seguindo uma ordem de 2 em 2, e todos os números são ímpares.

Já nestes protocolos escritos, os estudantes usam a linguagem algébrica para expressar a generalização encontrada. No caso do primeiro, usam a expressão d=p·2 para representar uma relação recursiva entre o número de pessoas que ficam sabendo da Fake News em dois dias consecutivos.

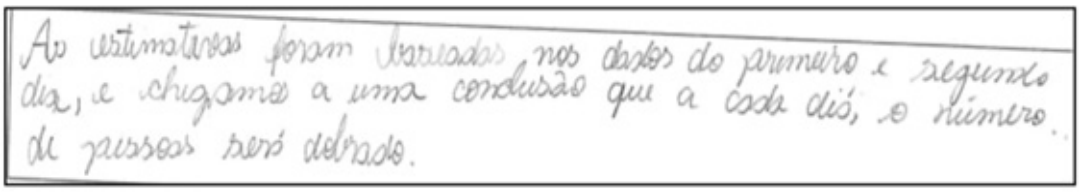


No segundo, usam a fórmula geral de uma função exponencial, porém sem explicitar o que x e y representam no contexto da tarefa.

Entendimento Essencial 5: O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar a razão de uma generalização ser verdadeira ou falsa.

Conforme destacado por Lannin, Ellis e Elliot (2011) esse processo contribui para validar uma justificativa ou refutar conjecturas e generalizações. Os autores enfatizam que essa investigação pode ocorrer ao analisar os fatores que explicam por que uma afirmação matemática é verdadeira, dando "atenção a características específicas que fornecem insights sobre os relacionamentos que podem confirmar ou negar uma generalização". Além disso, os alunos podem explicar o motivo pelo qual uma afirmação geral é válida ou inválida, inclusive recorrendo a várias explicações para fundamentar sua justificativa.

Por exemplo, na Tarefa 2, quando os alunos precisam justificar como encontraram suas estimativas, explicam que se basearam nos dados do primeiro e do segundo, chegando à conclusão de que "a cada dia, o número de pessoas será dobrado".



No caso da Tarefa 3, um estudante poderia explicar que chegou à conclusão que a afirmativa (a) era correta testando alguns casos particulares de soma de dois números pares.

Entendimento Essencial 6: Envolve uma justificação matemática e um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.

Com base no conhecimento prévio e nas declarações gerais dos alunos que embasam suas generalizações, eles podem formular justificativas, válidas ou não, dependendo de como lidam com a argumentação para chegar a uma conclusão. Nesse contexto, destaca-se que para apresentar uma justificativa válida, os alunos precisam fornecer uma sequência lógica de afirmações, cada uma fundamentada em conceitos ou entendimentos previamente estabelecidos como verdadeiros, conduzindo a uma conclusão.

Essa justificativa deve demonstrar que a generalização é verdadeira para todos os casos no domínio, apoiando-se em relações subjacentes consistentes. Assim, a elaboração de uma justificativa vai além da mera verificação da validade de uma afirmação, exigindo uma investigação sobre a verdade de uma conjectura ou generalização além do domínio em questão.

Utilizando a Tarefa 3, por exemplo, a soma de dois números pares é par, não pode ser justificada a partir de um ou mais casos particulares, necessitando que seja baseado em argumentos lógicos e esses argumentos podem ser elaborados por estudantes em diferentes níveis de escolaridade.

- Uma criança dos anos iniciais do Ensino Fundamental poderia explicar que a soma de dois números pares é sempre um número par, observando que quando temos números pares sempre conseguimos formar duplas completas. E quando juntamos dois números desse tipo, não é possível "sobrar" algum elemento.
- Um aluno familiarizado com a linguagem algébrica poderia explicar que qualquer número par pode ser representado na forma 2m, onde m é um número natural. Se tiver outro número par, ele pode ser representado como 2n, onde n também é um número natural. Ao somar esses dois números pares, temos 2m+2n e, pela propriedade distributiva da multiplicação, eu posso escrever isso como 2(m+n) que continua sendo par.

Entendimento Essencial 7: Uma refutação matemática consiste em mostrar que uma afirmação particular é falsa.

Considerando que a refutação e a validação constituem etapas relevantes no processo de argumentação matemática para formular uma justificativa e determinar a veracidade de uma conjectura, é fundamental que os alunos reconheçam a importância dos contraexemplos e seu papel na sustentação do argumento de que uma declaração específica é falsa. Nesse contexto, Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que "um único contraexemplo pode invalidar a conjectura" e também uma generalização.

Por exemplo, no item (b) da Tarefa 3, onde questiona-se se a soma de dois números ímpares é ímpar, se tomarmos 3 e 5, ambos ímpares, a soma é 3+5 = 8 (par). Se tomarmos 7 e 9, ambos ímpares, a soma é 7+9 = 16 (par).

Esses exemplos mostram que a soma de dois números ímpares é, na verdade, um número par, servindo como justificativas para refutar a afirmação.

Entendimento Essencial 8: Justificar e refutar envolvem avaliar a validade dos argumentos.

Criar e analisar argumentos, explicar a veracidade das conjecturas, aprimorar as conjecturas com base nos argumentos que as sustentam, compreender o uso de definições e contra exemplos para demonstrar que as conjecturas são falsas, constituem aspectos fundamentais na justificação matemática.

Isso implica em identificar e corrigir erros ou equívocos em uma justificativa, seja na conclusão ou em partes específicas da declaração. Avaliar uma justificativa pode incluir o uso de diferentes formas de representação matemática para mostrar a falsidade de uma conjectura, reformular a conjectura para torná-la mais precisa ou verdadeira, revisar a conjectura para garantir sua coerência, além de uma análise detalhada dos argumentos que sustentam conclusões válidas.

Por exemplo, na letra (a) da Tarefa 3, para confirmar a afirmação de que a soma de dois números pares é par, não seria suficiente encontrar apenas um caso. Mesmo se tomarmos, por exemplo, 4+6 = 10 (par), ou 8+12 = 20 (par), não seria suficiente para justificar a validade dessa afirmação.

Já no caso do item (c) da mesma tarefa, um único caso seria suficiente para invalidar a afirmação. Por exemplo, 10 é um número par, mas podemos obtê-lo pela adição dos números 7 e 3, que são ímpares.

Entendimento Essencial 9: Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Considerando que muitas vezes os alunos fundamentam suas justificativas em conceitos matemáticos apresentados pelo professor, especialmente ao utilizar exemplos para testar conjecturas, é essencial que compreendam que a validade de uma generalização não deve depender apenas desses conceitos, de testes de exemplos ou de opiniões sobre sua veracidade.

No processo de justificação, os alunos devem explorar as relações matemáticas que sustentam e garantem a validade da generalização, apresentando argumentos que demonstrem que uma relação matemática é válida para todos os casos possíveis. Lannin, Ellis e Elliot (2011) destacam que "tomar uma decisão matemática com base na popularidade de uma ideia, em vez de um argumento matemático, não constitui uma justificativa matematicamente adequada".

Para exemplificar, na Tarefa 3, um aluno pode cometer o erro de justificar incorretamente que as afirmações (b) e (c) são verdadeiras com base na veracidade da letra (a). Isso pode ocorrer por analogia, assumindo que, uma vez testado e confirmado que a soma de dois números pares é um número par, essa estrutura se manteria válida se trocarmos "pares" por "ímpares".

Além disso, o aluno pode supor que, dado que a afirmação (a) seja verdadeira, a afirmação (c) também deve ser verdadeira, pois "diz a mesma coisa". No entanto, esse raciocínio é falho, pois ambas as afirmações estão incorretas nesse caso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões apresentadas ao longo deste estudo mostram a importância da formação continuada como uma maneira de lidar com dificuldades no ensino e na aprendizagem. Conforme destacado por Araman e Gomes (2020), esse processo permite que os educadores avancem profissionalmente, superando limitações da formação inicial e ajudando os professores a refletir sobre sua prática. Além disso, Anjos (2023) reforça a relevância da formação continuada ao enfatizar como a interação coletiva e o estímulo à investigação contribuem significativamente para o desenvolvimento do RM dos professores e, consequentemente, dos seus alunos. A troca de experiências e a reflexão conjunta são elementos-chave nesse percurso, permitindo que os docentes compreendam melhor conceitos como conjectura e generalização, aspectos fundamentais no ensino da matemática.

No contexto das tarefas de aprendizagem (TAP), Ribeiro e Ponte (2020) destacam que essas atividades devem incentivar reflexões sobre o conhecimento profissional e estimular um ensino mais exploratório. Além disso, Silva, Ribeiro e Aguiar (2023) ressaltam que é fundamental priorizar tarefas matemáticas que desafiem o pensamento dos alunos e incentivem a investigação. O uso dessas tarefas em um ambiente colaborativo proporciona oportunidades de aprendizado baseadas em práticas reais de ensino, promovendo um ensino dinâmico e participativo. No desenvolvimento deste estudo, foram analisadas três tarefas que fomentam o RM, incentivando os alunos a formular conjecturas, identificar padrões e justificar suas descobertas. Essas tarefas possibilitam uma abordagem mais investigativa e reflexiva, aproximando o aprendizado da matemática de um contexto significativo para os estudantes.

Os Entendimentos Essenciais relacionados à conjectura, generalização e justificação matemática, (Lannin, Ellis e Elliot, 2011) desempenham um papel determinante nesse processo. Conjecturar envolve formular afirmações provisoriamente verdadeiras e testar sua validade, promovendo a investigação e a análise de padrões matemáticos. A generalização permite estender esse raciocínio e identificar regularidades, exigindo que os alunos compreendam o domínio e os limites da aplicação dessas generalizações. Justificar e refutar, por sua vez, são processos fundamentais na validação de conjecturas e na construção de argumentos matemáticos sólidos. Esses aspectos se refletem diretamente nas tarefas matemáticas propostas e na prática docente, evidenciando a necessidade de um ensino que favoreça a exploração e a argumentação.

A atuação do professor como facilitador nas discussões é de extrema importância, pois orienta os alunos na identificação de erros em seu RM e estimula a construção colaborativa do conheci-

mento. Para que os estudantes mobilizem diferentes processos de RM, é essencial que o professor compreenda os nove Entendimentos Essenciais. Com esse conhecimento, ele pode criar estratégias de ensino que promovam a exploração, a troca de ideias e a validação de conjecturas. Dessa forma, o professor atua como mediador, aprofundando o entendimento matemático e desenvolvendo a capacidade de argumentação, além de favorecer a interligação de diversas ideias na matemática.

Diante disso, este estudo destaca que um programa de formação continuada bem estruturado deve contemplar espaços colaborativos que fomentem a troca de saberes, promovam discussões críticas e incentivem práticas investigativas. Essa abordagem não apenas fortalece o desenvolvimento profissional dos educadores, mas também melhora a aprendizagem dos estudantes, contribuindo para um ensino mais reflexivo e significativo.

Por fim, reforça a necessidade de políticas educacionais que valorizem a formação continuada, garantindo aos professores oportunidades de aprimoramento constante e acesso a metodologias inovadoras. Dessa forma, é possível garantir um ensino mais qualificado e alinhado aos desafios contemporâneos do ensino e da aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. **Synthese**, v. 134, p. 25-44, 2003.

ANJOS, L. Q. **Contribuições de um processo formativo para professores dos anos iniciais visando a compreensão dos entendimentos essenciais de raciocínio matemático**. 2023. 129 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

ARAMAN, E. M. O.; GOMES, L. F. Desenvolvimento profissional e histórias da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020.

BALL, D. L.; BEN-PERETZ, M.; COHEN, R. B. Records of practice and the development of collective professional knowledge. **British Journal of Educational Studies**, v. 62, n. 3, p. 317-335, 2014.

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing practice, developing practitioners: Toward a practice based theory of professional education. In: SYKES, G.; DARLING-HAMMOND, L. (Eds.). **Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice**. San Francisco, CA: Jossey Bass, p. 3-32, 1999.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CABERLINI, G. S. F.; GARCIA, T. M. R. Práticas de ensino exploratório em matemática: implicações para a aprendizagem dos alunos e para o trabalho docente. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**, v. 1, p. 1-28, 2016.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação**. 2010. 446 f. Tese (Doutorado em Educação, Didática da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

LANNIN, J.; ELLIS, A.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 32, p. 781-801, 2018.

OLIVEIRA, L. S. **Conhecimentos profissionais de professores em um contexto de formação continuada a respeito do raciocínio matemático**. 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)–Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

PEDRO, I. J. C. R. **Das sequências à proporcionalidade direta: Uma experiência de ensino no 6.º ano de escolaridade**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação)–Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. Práticas profissionais dos Professores de Matemática**. 1 ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetike**, v. 28, p. e020027, 2020.

RUSSEAL, S. Mathematical reasoning in the elementary grades. In: STIFF, L. V.; CURCIO, F. R. (Eds.). **Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)**, p. 1-12. Reston, VA: NCTM, 1999.

SILVA, D. I. B.; RIBEIRO, A. J.; AGUIAR. Aventura formativa acerca do pensamento algébrico nos anos iniciais: das aprendizagens planejadas àquelas que surpreendem. **Vidya**, v. 43, n. 1, p. 77-97, 2023.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

STEIN, M. K; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v.3, n. 4, p. 268-275, 1998.

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

WOOD, T. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond "natural teaching". In: ABRANTES, P.; PORFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Org.). The interactions in the mathematics classroom: proceedings of the CIEAEM 49. **Setúbal: Escola Superior de Educação**, p. 34-43, 1997.