CAPÍTULO 1

O que todo professor precisa saber sobre Raciocínio Matemático?

Luís Felipe Gonçalves Carneiro
Eliane Maria de Oliveira Araman
João Pedro da Ponte

INTRODUÇÃO

Muitas vezes ouvimos, e até mesmo falamos, que o estudo da matemática desenvolve o raciocínio do aluno. Entretanto, o que é raciocinar matematicamente é algo vago e pouco explicado no âmbito das práticas letivas. Mata-Pereira e Ponte (2017) afirmam que, apesar de ser um termo comum na Educação Matemática, raciocínio é por vezes utilizado com um significado impreciso, próximo ou sinônimo a pensamento. Entretanto, na perspectiva de Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), raciocinar pertence ao pensar, porém é mais restrito, de forma que raciocinar pode ser compreendido como processo de obter novas informações a partir de informações já conhecidas e de maneira justificada.

Essa imprecisão com relação ao que é raciocínio, de modo particular ao Raciocínio Matemático, também está presente nos currículos oficiais. Em nível internacional, Jeannotte e Kieran (2017) relatam que o modo como o Raciocínio Matemático é descrito nos documentos curriculares oficiais "tende a ser vago, assistemático, e até mesmo contraditório, de um documento para outro" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 2).

Com relação aos documentos curriculares brasileiros, na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) menciona-se a importância ao Raciocínio Matemático. No Ensino Fundamental, por exemplo, o ensino da matemática deve desenvolver o letramento matemático, que é, de acordo com o documento, a capacidade de empregar a matemática em uma variedade de contextos e inclui raciocinar matematicamente.

Há, na BNCC (Brasil, 2018), uma tentativa de definir o Raciocínio Matemático. O documento indica que os processos de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas pressupõem o Raciocínio Matemático. Além disso, traz uma competência que envolve "investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas [...] identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal". A BNCC (Brasil, 2018) também considera que a aprendizagem em Matemática está relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos.

Entendemos que o desenvolvimento do Raciocínio Matemático é um caminho para que os alunos atribuam significados aos conteúdos que aprendem e, mais importante do que conhecer objetos da matemática, é saber como eles se conectam com outros (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012). É desejável que os alunos não somente conheçam e utilizem os conceitos matemáticos, mas saibam explicar por que funcionam. Nesse sentido, encaramos o Raciocínio Matemático como algo que permite dar sentido aos objetos e aos procedimentos matemáticos, uma vez que requer que os alunos justifiquem suas afirmações (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012). Desse modo, ao explicarem algo, precisam mobilizar conhecimentos anteriores e atribuir sentido aos novos.

Tendo em vista a relevância que o desenvolvimento do Raciocínio Matemático tem na aprendizagem matemática e na reduzida explicitação conceitual sobre o que ele é, escrevemos o presente capítulo com o intuito de esclarecê-lo conceitualmente em relação à sua estrutura e aos seus processos, com a finalidade de auxiliar professores que ensinam matemática e pesquisadores na compreensão desse conceito. O capítulo está organizado em duas perspectivas: uma teórica, na qual apresentamos e discutimos a definição de Raciocínio Matemático, de sua estrutura e de seus processos; e outra na qual trazemos três tarefas matemáticas, que usamos como exemplos para evidenciar como seus processos foram mobilizados pelos alunos que resolveram essas tarefas.

O QUE É O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO?

Como já mencionamos, o entendimento de pesquisadores e de documentos curriculares sobre o Raciocínio Matemático nem sempre é o mesmo. Mata-Pereira e Ponte (2017), por exemplo, afirmam que o termo raciocínio é bastante comum na Educação Matemática, mas por vezes utilizado com um significado pouco preciso, próximo ou sinônimo a pensamento.

Em outro estudo, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) contrastam a ideia de raciocinar com pensar, concluindo que raciocinar possui um significado mais restrito do que pensar. Os autores entendem que "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 7). Assim, para esses e outros autores (Araman; Serrazina, 2020; Mata-Pereira; Ponte, 2017, 2018; Morais; Serrazina; Ponte, 2018; Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012), raciocinar matematicamente é utilizar informação matemática já conhecida para obter novas informações matemáticas de maneira justificada.

Brodie (2010), por sua vez, escreve que o termo raciocinar implica em desenvolver linhas de pensamento que servem a determinados propósitos, como resolver um problema ou convencer outros e a si próprio de certa afirmação. A autora define que o Raciocínio Matemático consiste em “raciocinar sobre os e com os objetos da matemática” (Brodie, 2010, p. 7), ainda defendendo que é um aspecto chave na descoberta matemática e contribui para a comunicação de ideias aos demais.

Por outro lado, Lannin, Ellis e Elliot (2011) entendem que o Raciocínio Matemático é um processo evolutivo de conjecturar, investigar porquês, além de desenvolver e avaliar argumentos. Numa perspectiva semelhante, Stylianides (2009) considera que raciocínio-e-prova engloba a identificação de padrões, a produção de conjecturas, de argumentos e de provas, as quatro principais atividades na formação do conhecimento matemático e no processo de dar sentido. Stylianides (2009) esclarece que utiliza o termo raciocínio-e-prova hifenizado para evidenciar que as quatro atividades citadas devem ser vistas de modo integrado.

Jeannotte e Kieran (2017) realizaram um estudo no qual elaboraram um modelo conceitual para o Raciocínio Matemático a partir da literatura sobre o assunto. Com isso, as autoras definem o Raciocínio Matemático como “um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos” (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 7). Além disso, as pesquisadoras identificam que o Raciocínio Matemático é comumente definido em termos de sua estrutura, o que denominam como o seu aspecto estrutural. No entanto, também identificam o aspecto processual do Raciocínio Matemático, menos definido e explorado epistemologicamente do que o primeiro.

O aspecto estrutural do Raciocínio Matemático é mais estático e refere-se à forma do raciocínio, sendo a dedução, a indução e a abdução as formas mais comuns. Já o aspecto de processos possui alguns verbos de ação associados, que representam a natureza temporal do Raciocínio Matemático (Jeannotte; Kieran, 2017). Optamos por usar nesse capítulo o quadro teórico proposto por Jeannotte e Kieran (2017) para o Raciocínio Matemático, no qual as autoras identificaram nove processos que discutimos mais adiante.

ASPECTO ESTRUTURAL

No aspecto estrutural, distinguem-se os raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo. Cada um deles infere uma diferente conclusão, segundo Jeannotte e Kieran (2017). As pesquisadoras ainda relacionam às conclusões produzidas um valor epistêmico, que se refere “à noção de que um enunciado pode ser verdadeiro, provável ou falso” (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 2).

O raciocínio dedutivo, por exemplo, é fundamental na matemática (Mata-Pereira, 2012). Isso porque a tradição axiomática da matemática, estabelecida por Euclides, segue o método dedutivo (Aliseda, 2003). Inclusive o currículo brasileiro passou a enfatizar que os alunos devem experimentar e interiorizar "o caráter distintivo da matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo" (Brasil, 2018, p. 540).

De acordo com Mata-Pereira (2018), o raciocínio dedutivo se desenvolve do geral para o particular. Ou seja, conclui-se algo novo a partir de informações prévias (Mazzi; Schio, 2020). Nas palavras de Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio dedutivo infere uma afirmação a partir dos dados e garantias disponíveis. E, portanto, sua validade está sujeita à validade dos dados e garantias (Jeannotte; Kieran, 2017). De acordo com Aliseda (2003) essa relação necessária entre premissas e conclusão é justamente um dos aspectos característicos do raciocínio dedutivo.

Outro aspecto característico do raciocínio dedutivo é, segundo Aliseda (2003), o fato das conclusões que ele permite obter serem incontestáveis. A autora complementa afirmando que um teorema, uma vez provado, não deixa dúvidas de sua validade, independente de outros resultados que sejam incorporados ao corpo de conhecimentos da matemática. Meyer (2010) concorda que a dedução leva à certeza e a um conhecimento irrefutável. Para Meyer (2010), todo teorema é resultado, idealmente, de um encadeamento de deduções, já que é o único tipo de inferência que garante certeza. Mas, apesar da centralidade do raciocínio dedutivo na matemática, isso não significa que seja suficiente para explicar todo o Raciocínio Matemático, que possui também aspectos informais (Mata-Pereira, 2018). Ou, ainda, que o Raciocínio Matemático deva ser reduzido à dedução, já que o caráter empírico da matemática tem ganhado relevância em pesquisas (Aliseda, 2003).

O raciocínio indutivo é o segundo mais comum na literatura sobre este tema (Jeannotte; Kieran, 2017). Esse tipo de raciocínio possibilita a construção de uma afirmação a partir de alguns casos particulares (Pedemonte, 2007). A indução, segundo Meyer (2010) é usada frequentemente para descrever a criação de novas regras. Assim, ao contrário do raciocínio dedutivo, o indutivo é definido, "de um modo clássico, como a passagem do particular para o geral" (Rivera, 2008, p. 19).

Jeannotte e Kieran (2017) sublinham que o valor epistêmico relacionado às conclusões obtidas por raciocínio indutivo possui é de provável. Aliseda (2003) afirma que, ao contrário do raciocínio dedutivo, que é completamente certo, o indutivo precisa ser validado por testes e experimentações, sendo, dessa maneira, falível. Ainda que a prática da matemática e seus resultados sejam predominantemente dedutivos (Aliseda, 2003), a indução e processos empíricos desempenham um papel importante no processo de criação de matemáticos e estudantes de matemática (Brodie, 2010). Nos documentos curriculares brasileiros, ela também aparece, assim como a dedução, ainda que de forma mais tímida: "[a matemática no Ensino Fundamental] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações [...], fazendo induções e conjecturas" (Brasil, 2018, p. 265).

O raciocínio abdutivo, por fim, é outra forma de raciocínio que não gera conclusões indubitavelmente corretas. É "uma inferência que permite a construção de uma afirmação partindo de um fato observado" (Pedemonte, 2007, p. 29). A abdução é, basicamente, pensar possíveis explicações para evidências (Aliseda, 2003). Mata-Pereira (2018) esclarece que o raciocínio abdutivo possui um caráter principalmente explicativo, ainda que também contribua na construção de conhecimento. Meyer (2010) afirma que a abdução leva a um caso possível, mas não definitivo. O raciocínio abdutivo oferece apenas hipóteses que podem ser refutadas com informações adicionais (Aliseda, 2003), situação contrária ao raciocínio dedutivo, que produz resultados válidos e que assim permanecerão independentemente de novos resultados.

Os três tipos de raciocínio mencionados não ocorrem necessariamente apartados. Brodie (2010), por exemplo, menciona que matemáticos trabalham frequentemente de forma intuitiva em detrimento do rigor e da formalidade, buscando entendimento e significado. Obviamente, a única forma de inferência permitida para a sistematização do conhecimento matemático é a dedução, por sua garantia de certeza (Meyer, 2010). Nesse sentido, Brodie (2010) acrescente que a indução, por exemplo, pode complementar o raciocínio dedutivo. Mazzi e Schio (2020) argumentam que o raciocínio indutivo pode ser validado se passar por um processo dedutivo.

Chimoni, Pitta-Pantazi e Christou (2018) mencionam que uma mistura das formas de raciocínio dedutiva, indutiva e abdutiva parece estar relacionada à habilidade dos alunos em generalizar, enquanto Rivera e Becker (2009) também dão como exemplo a atividade de matemáticos para argumentar a favor da complementaridade das formas de raciocínio. Quando matemáticos desenvolvem um modelo, eles inicialmente constroem suposições e hipóteses – abdução –, depois as testam repetidamente – indução – e, por fim, provam utilizando rigorosas técnicas dedutivas (Rivera; Becker, 2009). Rivera (2008), compreende a indução e a abdução como etapas prévias necessárias para o estabelecimento de uma generalização válida.

ASPECTO PROCESSUAL

É importante destacar que Jeannotte e Kieran (2017), apesar de terem pontuado uma diferença entre os aspectos estrutural e processual do Raciocínio Matemático, também sublinham que eles representam duas maneiras de olhar para o mesmo objeto. De acordo com as autoras, as estruturas são parte dos processos enquanto os processos influenciam na construção das estruturas.

Além disso, o aspecto de processos se faz necessário porque como referem Jeannotte e Kieran (2017), o estrutural não é suficiente para compreender inteiramente a natureza do Raciocínio Matemático Os processos de Raciocínio Matemático podem ser entendidos como "processos que derivam narrativas sobre objetos ou relações pela exploração de relações entre objetos" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 9). As autoras identificam oito processos de Raciocínio Matemático divididos em duas categorias – validação, e busca por semelhanças e diferenças –, e um nono processo, o de exemplificação, que dá suporte a processos dessas duas categorias. Começamos pelos processos da primeira categoria.

CONJECTURA

Não é incomum que a conjectura seja o primeiro processo de Raciocínio Matemático mobilizado por um aluno que se depare com uma tarefa matemática. Muitas vezes, uma conjectura pode surgir naturalmente, somente com o contato do aluno com uma tarefa. A simples tentativa de compreender certa situação matemática pode levar o aluno a produzir uma conjectura. Mas, sobretudo, ela é produzida na busca por uma resposta ou explicação de determinado fato.

O início de uma tarefa, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), é decisivo, já que os alunos estão se familiarizando com seus dados. É nesse momento que os alunos começam a organizá-los ou, até mesmo, gerar mais dados para formular questões. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). É nessa atividade intensa que podem emergir as primeiras conjecturas. Cañadas *et al.* (2007), por exemplo, defendem que uma conjectura pode ser produzida a partir da manipulação de objetos matemáticos.

Entretanto, é importante ressaltar que as conjecturas podem surgir de várias maneiras aos alunos. Tal processo pode ser produzido a partir da análise de exemplos específicos ou de inferências a partir de uma situação específica (Lannin; Ellis; Elliot, 2011), da observação de um número finito de casos discretos, da busca por uma regra que explique algo, da representação visual de um problema (Cañadas *et al.*, 2007), ou por analogia com outra situação já conhecida (Cañadas *et al.*, 2007; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019).

Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que conjecturar é raciocinar sobre relações matemáticas visando o desenvolvimento de afirmações que são assumidas como verdadeiras provisoriamente. Já na visão de Stylianides (2009), a conjectura pode ser entendida como uma hipótese raciocinada sobre uma relação matemática baseada em evidência incompleta. Pode pensar-se, ainda, que a conjectura é um processo de Raciocínio Matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade que pode ser verdadeira e que tem potencial para teorização matemática (Jeannotte; Kieran, 2017).

Em outras palavras, a conjectura é uma hipótese que emerge de uma tarefa matemática, podendo ser verdadeira ou não. E, de acordo com alguns autores, também ocorre de conjecturas não verdadeiras surgirem naturalmente e, apesar de não desejáveis a princípio, podem ser pontos de partida em direção a um entendimento mais profundo de ideias matemáticas (Lannin; Ellis; Elliot, 2012; Mata-Pereira, 2012).

Esse caráter provisório da conjectura é essencial para caracterizá-la. Pela sua própria natureza, uma conjectura é produzida supondo que seja verdadeira, o que pode ou não ocorrer. Stylianides (2008) faz uma observação relevante ao explicar por que faz uso do termo "hipótese raciocinada" para definir a conjectura. O autor afirma que tal termo enfatiza o caráter não arbitrário da conjectura (Stylianides, 2008). De fato, ela deve estar amparada nos dados da tarefa e buscar explicação para algum fato matemático.

Devido a esse caráter experimental da conjectura, ela cria a necessidade por mais Raciocínio Matemático (Lannin; Ellis; Elliot, 2011). Lannin, Ellis e Elliot (2011), consideram ainda que todo o Raciocínio Matemático pode se iniciar com o desenvolvimento de uma conjectura. Quando os alunos se empenham em investigá-las, eles "mergulham no raciocínio matemático" (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p.8).

Assim, dado que a conjectura é uma afirmação possivelmente verdadeira, outros argumentos são necessários para sustentar sua validade. É na tentativa de encontrar tais argumentos que um aluno tem a possibilidade de se engajar profundamente em uma tarefa e, por consequência, mobilizar outros processos de Raciocínio Matemático. A "conjectura, pela sua própria natureza, clama por maiores investigações" (Stylianides, 2009, p. 264).

Entretanto, apesar de a conjectura ser um processo do Raciocínio Matemático que surja naturalmente durante a resolução de uma tarefa, nem sempre ela é expressa de maneira que se possa investigá-la mais a fundo. É possível que os alunos produzam suas conjecturas, mas elas permaneçam desconhecidas dos professores, já que nem sempre são escritas nem mesmo verbalizadas.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019), é frequente que uma conjectura não seja formulada explicitamente e fique restrita apenas ao pensamento do aluno. Pode ser também que a conjectura seja parcialmente verbalizada ou expressa por meio de uma linguagem não verbal, se apoiando em gestos, por exemplo. Araman e Serrazina (2020) destacam ainda que, ao definir uma estratégia que julgam conduzir a um resultado correto, os alunos podem formular, mesmo que inconscientemente, suas conjecturas.

A não verbalização de uma conjectura pode ser uma barreira ao desenvolvimento do Raciocínio Matemático do aluno. Lannin, Ellis e Elliot (2011) ressaltam que, para que uma conjectura possa ser investigada, ela precisa ser declarada. Nesse sentido, destaca-se também a importância dos registros escritos, já que levam o aluno a explicitar suas ideias (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019).

Podem ser diversos os fatores que impedem os alunos de expressarem suas conjecturas. Eventualmente, a falta de familiaridade com a natureza da investigação matemática pode ser um deles. A ideia de que o professor de matemática espera que sejam dadas somente respostas certas pode ser outra. E, dada a importância da afirmação das conjecturas para o desenvolvimento do Raciocínio

Matemático, também é muito importante que o professor estimule que o aluno a verbalize e, idealmente, a registre por escrito. Nesse sentido, existem pesquisam que discutem as ações do professor que promovem o Raciocínio Matemático (Trevisan; Araman, 2021; Trevisan, 2022; Araman *et al.*, 2023; Gross; Trevisan; Araman, 2024).

GENERALIZAÇÃO

A generalização é um processo que se destaca pela sua importância na matemática. Ela está intrinsecamente ligada ao fazer matemática. No entanto, há que se diferenciar a matemática profissional, acadêmica, daquela praticada na escola (Moreira; David, 2008). A matemática acadêmica refere-se a um corpo de conhecimento conhecido e organizado por matemáticos profissionais, se caracteriza pelos seus altos níveis de generalidade e abstração, sendo o processo lógico-dedutivo e a precisão da linguagem valores essenciais (Moreira; David, 2003; 2008).

A matemática escolar se desenvolve num contexto educativo e é praticada pelo professor de matemática (Moreira; David, 2003). Essa matemática não é uma visão mais simples da acadêmica, nem mesmo uma criação completamente autônoma e autossuficiente da escola, mas tem uma perspectiva diferente das coisas, encara os objetos matemáticos de outra forma (Moreira; David, 2003). Dessa maneira, a matemática, do ponto de vista acadêmico, não busca somente afirmações sobre objetos particulares, mas afirmações mais gerais, destacando-se, assim, a generalização (Mata-Pereira, 2012). Nesse caso, uma generalização só é válida se for demonstrável, provada (Mata-Pereira, 2012).

Isso reafirma a importância do processo de generalização pelo enfoque do Raciocínio Matemático. É desejável que os alunos sejam capazes de generalizar, considerando tal importância dentro da matemática. No entanto, deve compreender-se a diferença da generalização na matemática acadêmica e na matemática escolar. Na primeira, uma generalização só é válida se apoiada por uma demonstração válida, não sendo relevante a compreensão da pessoa que a produziu, enquanto na escola importa saber a maneira como o aluno raciocinou para obter uma generalização (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

Em resumo, a generalização é um processo de Raciocínio Matemático de grande importância por ser uma das bases da construção da matemática (Mata-Pereira, 2012). No entanto, devemos ter em mente que, no âmbito da escola, importa como o aluno generalizou, qual foi o seu entendimento da tarefa em questão que o possibilitaram isso e que argumentos utilizou para sustentar a generalização.

Jeannotte e Kieran (2017) entendem que a generalização é um "processo que infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos de um subconjunto deste conjunto" (p. 9). As características principais da generalização são o seu aspecto inferencial e a expansão do domínio (Jeannotte; Kieran, 2017). Outros pesquisadores compreendem que a generalização envolve dois tipos de atividade: identificar semelhanças entre diferentes casos e estender o raciocínio para além do domínio no qual ele se originou (Lannin; Ellis; Elliott, 2011; Brunheira; Ponte, 2019). Por sua vez, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) argumentam que a "generalização envolve uma afirmação de que certa propriedade ou técnica se sustenta para um conjunto mais amplo de condições ou objetos matemáticos" (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008, p. 3).

Assim, a generalização, assim como a conjectura, é um processo do Raciocínio Matemático que produz inferências, afirmações, que podem ou não ser verdadeiras. Logo, a generalização também cria a necessidade por mais Raciocínio Matemático, a fim de determinar sua validade. No entanto, diferencia-se da conjectura porque requer uma afirmação de domínio mais amplo. Dessa maneira, uma generalização pode se originar de uma conjectura que foi ampliada para termos mais gerais.

De acordo com Carraher, Martinez e Schliemann (2008), a conjectura desempenha um papel importante na generalização. Alguns pesquisadores concordam que ela pode ser uma conjectura de natureza geral (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008; Lannin; Ellis; Elliott, 2011; Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). Ainda assim, uma conjectura pode ou não vir a ser uma generalização (Lannin; Ellis; Elliott, 2011). Pode ser que o aluno não venha a ampliar o domínio de uma conjectura, ou mesmo determinada tarefa não gere tal necessidade na obtenção de uma resposta. Desse modo, a conjectura não amplia seu domínio.

Além disso, a própria generalização pode ser produzida sem a necessidade da conjectura. Ela pode se originar a partir da observação dos dados de um problema ou de outros processos de Raciocínio Matemático, como a identificação de padrões. Nas palavras de Mata-Pereira (2012), uma generalização pode ser formulada com base em casos particulares ou em propriedades já conhecidas (Mata-Pereira, 2012).

É nesse sentido que alguns pesquisadores ressaltam as naturezas empírica e teórica das generalizações (Carraher; Martinez: Schliemann, 2008). Elas são empíricas quando surgem da exploração dos dados em busca de tendências e estruturas implícitas ou teóricas quando da atribuição de modelos aos dados observados (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008; Mata-Pereira, 2018).

Ao observar uma sequência numérica formada por figuras, por exemplo, um aluno pode identificar os termos subsequentes, construindo, a partir disso, uma generalização de maneira empírica. Por outro lado, um aluno pode analisar a sequência e construir uma generalização a partir da observação das figuras, construindo um modelo que se ajuste a elas. Portanto, uma generalização empírica se baseia em regularidades obtidas a partir de alguns exemplos, enquanto uma teórica é elaborada com base em estruturas matemáticas (Stylianides, 2008).

Certos pesquisadores entendem que generalizações formuladas de maneira teórica são mais desejáveis, já que revelam maior capacidade de raciocínio dos alunos, visto que estabelecem relações de maior complexidade do que as empíricas (Mata-Pereira, 2012). Portanto, um dos principais desafios da matemática escolar é desenvolver a capacidade dos alunos de generalizarem com base em estruturas (Stylianides, 2008).

Assim, seria importante promover uma transição de uma matemática baseada em observações empíricas e casos particulares para um raciocínio com base em estruturas, que não se apoie, ou se apoie muito pouco, no empirismo (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008). Lannin, Ellis e Elliott (2011), no entanto, apontam que, quando os alunos desenvolvem generalizações, frequentemente utilizam uma linguagem nova ou pouco clara, com termos que precisam de maiores esclarecimentos.

Como já mencionamos, generalizar na matemática escolar difere de generalizar na matemática acadêmica. A linguagem rigorosa e precisa da matemática acadêmica raramente, ou nunca, será utilizada na escola. Em primeiro lugar, porque os alunos ainda não desenvolveram tal habilidade. Depois, porque não é esse o objetivo da matemática escolar. Desse modo, a transição para um raciocínio mais complexo, com base em estruturas matemáticas, deve ser realizada sem perder de vista o momento de desenvolvimento em que se encontram os alunos.

Primeiro, os alunos devem aprender a produzir generalizações buscando por padrões e percebendo relações (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008). Gradualmente, eles aprendem a formular essas mesmas generalizações com notações algébricas e, depois, aprendem a obter nova informação refletindo sobre expressões produzidas por eles mesmos ou por outros (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008). Nesse processo, os alunos podem refinar seus raciocínios e possuem a oportunidade de desenvolver maior precisão nas suas afirmações (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

IDENTIFICAÇÃO DE PADRÕES

A identificação de padrões pode surgir de tarefas que contenham sequências numéricas, por exemplo. Apesar desse processo de Raciocínio Matemático não ser exclusivo de tal conteúdo matemático, também é verdade que ele propicia a identificação de padrões. Sequências cujos termos estão representados por figuras são especialmente convidativos para a mobilização deste processo de Raciocínio Matemático.

Jeannotte e Kieran (2017) definem a identificação de padrões como "um processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 10). Do ponto de vista de Stylianides (2009), identificar um padrão é encontrar uma relação matemática que serve ou se ajusta a um conjunto de dados.

Portanto, assim como a conjectura, a identificação de padrões é um processo que se produz na busca por obter uma resposta para uma tarefa ou uma explicação para certo fato. Então, ela também se caracteriza como um processo que cria a necessidade de mais Raciocínio Matemático, visto que não tem um caráter de validação, mas de busca por semelhanças e diferenças.

Para identificar um padrão em uma tarefa, o aluno se envolve em uma busca ativa, mas também é necessário certo distanciamento do fenômeno observado (Jeannotte; Kieran, 2017). Logo, a identificação de um padrão é realizada quando o aluno está altamente comprometido com a tarefa. Ela exige uma observação atenta dos dados e certo tempo para a formulação e o teste de algumas hipóteses.

É possível que a identificação de um padrão e a conjectura, pela semelhança no modo como são produzidas, sejam confundidas, como se fossem somente um processo de Raciocínio Matemático. No entanto, ainda que esses processos possam ser confundidos, eles não são iguais (Araman; Serrazina; Ponte, 2020). Segundo Jeannotte e Kieran (2017), é possível identificar um padrão em um conjunto de dados sem a necessidade de expandi-lo a um conjunto maior, o que o difere da conjectura.

Entretanto, talvez a principal diferença entre os dois processos seja o valor epistêmico ao qual uma conjectura está sempre associada (Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020). Uma conjectura tem, a princípio, o valor epistêmico de provável, podendo mudar para verdadeira, o que não ocorre com a identificação de padrões (Jeannotte; Kieran, 2017). Uma vez identificado um padrão, ele é apresentado de um modo que não expresse dúvidas sobre a sua veracidade (Stylianides, 2009).

Ou seja, enquanto uma conjectura tem um valor epistêmico de provável, podendo se tornar verdadeira, a identificação de um padrão, por sua vez, não está associada a um valor epistêmico. Portanto, a conjectura demanda por outros processos de Raciocínio Matemático na busca por sua validação, por mudar seu valor epistêmico para verdadeiro. Já a identificação de um padrão possibilita mais Raciocínio Matemático. Ela pode dar suporte à produção de outros processos, sendo importante na reorganização e interpretação dos dados de uma tarefa, por exemplo.

Assim, a identificação de um padrão desempenha um papel importante na matemática, de levar a conjecturas (Stylianides, 2009). Desse modo, é um processo que pode anteceder a conjectura, mas isso não é uma regra. Stylianides (2009) refere que as relações entre a identificação de um padrão e a conjectura nem sempre são lineares. “É possível formular uma conjectura sem primeiro identificar um padrão” (Stylianides, 2009, p. 268).

CLASSIFICAÇÃO

A classificação é um processo de Raciocínio Matemático bastante associado a outros, como a comparação, a conjectura e a generalização. Jeannotte e Kieran (2017) indicam que o processo de classificar pode ser definido como aquele que infere, "pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos com base em propriedades e definições matemáticas" (p. 11). As autoras ainda defendem que classificar possibilita estruturar um discurso ao juntar ou separar diferentes objetos matemáticos.

Assim, classificar é agrupar objetos matemáticos de acordo com as suas características em comum. Figuras geométricas de quatro lados, por exemplo, podem ser classificadas como quadriláteros. Ou, se duas dessas figuras de quatro lados possuem os seus quatro ângulos internos iguais a 90°, podem ser classificadas como retângulos.

Brunheira (2019) destaca que classificar não é o mesmo que declarar uma definição matemática. A pesquisadora argumenta que classificar consiste em organizar objetos, identificando suas características comuns, seus atributos críticos. Portanto, determinado objeto matemático pertence a uma classe se respeitar os atributos críticos, enquanto a intenção da definição é estabelecer tais atributos (Brunheira, 2019).

Além disso, como mencionado anteriormente, a classificação está associada a outros processos de Raciocínio Matemático. Ela pode ser empregada pelo aluno tanto no início de uma tarefa quanto no fim, quando busca definir uma resposta. A classificação pode reunir elementos para que um aluno produza uma conjectura ou, ainda, dar suporte a uma argumentação, a uma justificativa.

Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020) concordam que a classificação está relacionada a outros processos de Raciocínio Matemático, enfatizando a generalização. Segundo os autores, a determinação das classes no processo de classificar favorece a generalização porque a "enunciação dos atributos críticos diz respeito à generalidade dos objetos de uma dada classe" (Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020, p. 14). Ou seja, a classificação favorece a generalização porque nela se observam aspectos gerais de alguns objetos matemáticos.

COMPARAÇÃO

A comparação, por sua vez, como referem Jeannotte e Kieran (2017), é um processo de Raciocínio Matemático que "infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas" (p. 11). Esse processo de Raciocínio Matemático relaciona-se com a generalização e com a identificação de padrões (Jeannotte; Kieran, 2017). De acordo com essas autoras, a identificação de padrões necessita da comparação de casos ou exemplos para destacar o padrão. No entanto, esses processos não podem ser confundidos, já que a identificação de padrões vai além de somente comparar casos, enquanto a comparação somente destaca semelhanças ou diferenças (Jeannotte; Kieran, 2017).

Além disso, a comparação também pode levar ao processo de classificação, já que para agrupar objetos matemáticos em classe pode ser necessário compará-los para perceber as características comuns. Ademais, a comparação também pode relacionar-se com a conjectura. De acordo com Araman e Serrazina (2020), a comparação de casos torna possível conjecturar. Morais, Araman e Trevisan (2022) mostraram que, em uma tarefa matemática, a comparação realizada por duas duplas de alunas levou-as a formar novas conjecturas e, posteriormente, a justificativas.

Assim, a comparação busca identificar semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos por analogia, podendo levar os alunos a estabelecerem correspondências entre eles e, desse modo, reunir mais elementos que promovam outros processos de Raciocínio Matemático.

JUSTIFICAÇÃO

Os processos relacionados à validação que trataremos são a justificação e a prova. Esses processos buscam modificar o valor epistêmico de uma afirmação (Jeannotte; Kieran, 2017). Ou seja, os processos de validação buscam reunir elementos que deem suporte à mudança de uma conjectura ou generalização de provável para verdadeira ou de provável para falsa. A justificação é, portanto, um processo de Raciocínio Matemático que, "pela busca de dados, apoio e garantias, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 12). Ou, ainda, pode ser entendida como "um argumento lógico, baseado em ideias já compreendidas" (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Segundo Morais, Serrazina e Ponte (2018), é ao justificar que os alunos revisitam ideias matemáticas, levando a um sólido entendimento destas e ao desenvolvimento de novas ideias. Como refere Brodie (2010), a justificação possibilita "fazer conexões entre diferentes ideias, proporcionar garantias para afirmações e conjecturas, liquidar disputas [argumentativas] e desenvolver novas ideias matemáticas" (p. 9). Sendo assim, a justificação é fundamental para todo o Raciocínio Matemático (Brodie, 2010).

A justificação é relevante dentre os processos de Raciocínio Matemático porque desperta a necessidade de argumentar, de sustentar as nossas ideias. É necessário evidenciar as razões pela qual determinada afirmação é válida ou não, conforme o caso. Uma justificação válida não deve apenas mostrar que uma afirmação é verdadeira, mas dar as razões pelas quais ela é verdadeira (Morais; Serrazina; Ponte, 2018).

Vale destacar a relação desse processo com a matemática acadêmica, que tem como referência um "corpo de conhecimentos abstratos conectados por uma lógica dedutiva rigorosa que a constitui como ciência" (Moreira; David, 2003, p. 76). Pode relacionar-se tal lógica dedutiva da matemática com os processos de Raciocínio Matemático relacionados à validação. Eles estão no cerne do fazer matemática. São resultados matemáticos válidos somente aqueles que foram demonstrados.

Desse modo, os alunos estão desenvolvendo o Raciocínio Matemático quando produzem uma justificação e, por estar estreitamente relacionada ao conceito matemático de prova, faz com que os alunos estejam mais preparados para realizar futuras demonstrações matemáticas (Brodie, 2010; Mata-Pereira, 2018). Mas, apesar de tal relação ser pertinente, vale lembrar que a matemática escolar tem objetivos distintos da acadêmica.

Na escola, uma justificação tem por objetivo argumentar o porquê de uma afirmação ser ou não válida, além de evidenciar o Raciocínio Matemático do aluno. Com isso, uma justificação que não seja válida também é importante. Na matemática escolar, a ideia incorreta de um aluno pode ser um passo na direção do aprendizado e de reconhecer outras interpretações de um conceito matemático (Moreira; David, 2008).

Um obstáculo apontado por pesquisadores é o fato de os alunos nem sempre justificarem suas afirmações. De modo geral, eles não sentem a necessidade de justificar suas conjecturas (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012). Mesmo em atividades que visam a investigação matemática, a justificação tende a ser relegada ao segundo plano (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019). Além disso, os alunos estão mais habituados a simplesmente aceitar o que é dito pelo professor ou por materiais didáticos em detrimento das suas próprias justificações.

Mata-Pereira (2018) argumenta que os alunos podem justificar de várias maneiras. Em algumas vezes, com base em seus conhecimentos anteriores, em outras, simplesmente com base na autoridade do professor ou de um livro didático (Mata-Pereira, 2018). Em vista disso, alguns pesquisadores discutem os níveis de formalidade de uma justificação.

De acordo com Mata-Pereira (2018), um primeiro nível de justificação ocorre quando ela se baseia na autoridade de alguém ou de materiais didáticos, um segundo nível quando a justificação se baseia em evidências empíricas e, por fim, um terceiro nível quando ela tem coerência lógica e se baseia em argumentos dedutivos (Mata-Pereira, 2018).

Lannin (2005), por sua vez, elenca quatro níveis de justificação, sendo o primeiro aquele que apela à autoridade externa. Uma justificação de nível 2 é baseada em evidências empíricas, em casos particulares, enquanto uma de nível 3 se baseia em exemplos genéricos, quando uma justificação dedutiva é expressa com base em um caso particular (Lannin, 2005). Por fim, em uma justificação de nível 4 a validade é dada através de um argumento dedutivo, independente de casos particulares (Lannin, 2005).

A justificação pode ainda invalidar uma afirmação, caso reúna elementos que evidenciem os motivos para tanto. Assim, a justificação pode ser utilizada para negar uma afirmação, argumentando contra uma ideia matemática, ou modificando seu valor epistêmico de provável para falso (Stylianides, 2009; Jeannotte; Kieran, 2017). Lannin, Ellis e Elliot (2011) referem-se a isso como refutação, que "envolve [mostrar] por que uma afirmação em particular é falsa" (Lannin; Ellis; Elliott, 2011, p. 12). Assim, tal como justificar, refutar também envolve avaliar a validade de argumentos (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Certos autores consideram que a justificação deve ser adotada desde os primeiros anos de escolaridade, com diferentes graus de formalidade (Brunheira; Ponte, 2019). Os alunos devem ser incentivados a justificar suas afirmações desde os primeiros anos, visando uma formalização cada vez maior, que conduza naturalmente a demonstrações (Mata-Pereira, 2012; Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012).

PROVA

A prova em aulas de matemática é defendida por alguns pesquisadores. É o exemplo de Hanna (2000), que reconhece a importância de atividades de exploração, mas defende que se deve fazer o uso também da prova em sala de aula. Vale ressaltar que o sentido de prova que empregamos aqui não é o mesmo de demonstração ou prova formal, referida por Jeannotte e Kieran (2017) como aquela que lida com teoria matemática já formalizada, os axiomas e teoremas, e resulta em uma nova teoria aceita pela comunidade matemática.

Assim, a prova é um processo de Raciocínio Matemático que modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro, sendo que assume "narrativas aceitas pela comunidade que são verdadeiras e disponíveis sem justificações adicionais; [tem] uma reestruturação final de natureza dedutiva; [e realizações] que são apropriadas e conhecidas, ou acessíveis à classe" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 12-13).

Nessa perspectiva, a prova é um processo que busca confirmar uma afirmação, fornecendo elementos para tanto. Contudo, ela deve contar com conceitos que sejam aceitos previamente pela comunidade em questão, ou seja, os alunos da sala de aula. Além disso, esses conceitos prévios devem ser organizados dedutivamente para conduzir a um novo resultado, que seja aceito e acessível aos alunos.

Stylianides (2009) debruça-se sobre esta questão. Para o autor, a prova é um argumento válido, baseado em verdades aceitas pela comunidade em questão, a favor de um argumento matemático e que fazem referência a outras verdades aceitas e que são essenciais para a prova (Stylianides, 2009). Portanto, a prova é uma construção mais elaborada do que uma justificação. Enquanto a última tem como objetivo somente reunir elementos favoráveis a determinada afirmação, explicando os motivos pelo qual ela é verdadeira, a prova precisa de uma estrutura dedutiva, evidenciando fatos matemáticos anteriores que permitem dizer com certeza que uma afirmação é verdadeira.

Ao mesmo tempo, a prova não é uma demonstração, não é uma prova formal do ponto de vista da matemática acadêmica. Isso porque seus resultados não são integrados ao corpo de conhecimentos matemáticos como uma nova teoria. Os resultados da prova servem aos alunos da sala de aula e são-lhes acessíveis. A prova formal, por sua vez, baseia-se em afirmações que devem estar explícitas em alguma teoria matemática, trabalha com teoria matemática já construída, como os teoremas e axiomas, e se diferencia da prova utilizada na matemática escolar pelo seu grau de rigor e formalidade (Jeannotte; Kieran, 2017).

Vale destacar que "a prova é uma forma de argumento e de justificação, [mas] nem todos os argumentos e justificações são provas" (Brodie, 2010, p. 9). Nesse sentido, Stylianides (2009) indica que "um argumento contra ou a favor de uma afirmação não se constitui como prova (Stylianides, 2009, p. 266). Mesmo que uma justificação mude o valor epistêmico de uma afirmação, ela não é uma prova porque essa, por sua vez, requer uma estruturação final dedutiva e deve contar com um conjunto de conceitos matemáticos prévios que sejam aceitos pela classe (Jeannotte; Kieran, 2017).

EXEMPLIFICAÇÃO

Por fim, há o processo de exemplificação, que se relaciona tanto com a busca por semelhanças e diferenças quanto com a validação. Ela é um processo que "apoia outros processos de raciocínio matemático por inferir exemplos que auxiliam na busca por semelhanças e diferenças [e na] validação" (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 14). Esse processo permite inferir dados sobre um problema e que se relaciona, nesse caso, com a identificação de padrões, a generalização e a conjectura.

Lannin, Ellis e Elliott (2011) afirmam que os exemplos podem ajudar na compreensão dos alunos quando buscam entender a validade de afirmações. Ainda mencionam que os matemáticos utilizam exemplos ou casos específicos corriqueiramente para investigar estruturas matemáticas ou pensar sobre justificações, mesmo que eles não sejam suficientes para tanto (Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Desse modo, o processo de exemplificação pode auxiliar os alunos no início de uma tarefa, quando ainda tentam compreendê-la. A construção de exemplos pode fazer com que o aluno amplie sua compreensão e inicie, por meio de comparações e classificações, a elaboração de conjecturas.

Há, ainda, a possibilidade da utilização de contraexemplos para refutar afirmações, sendo ele "uma instância que satisfaz as condições, mas não a conclusão de uma afirmação" (Galbraith, 1995, p. 416), ele pode ser apresentado em justificações para refutar uma afirmação, o que é parte do Raciocínio Matemático (Mata-Pereira, 2012; 2018). É importante mencionar que, muitas vezes, os alunos não consideram um contraexemplo suficiente para invalidar uma afirmação, não aceitando o fato de uma única exceção tornar a afirmação falsa (Galbraith, 1995; Lannin; Ellis; Elliott, 2011).

Visto isso, a exemplificação tem papel importante em duas frentes do Raciocínio Matemático. Ela pode auxiliar no entendimento da tarefa e na produção de conjecturas ou generalizações, como também pode auxiliar no momento de produzir justificações. Vale mencionar que exemplos genéricos são vistos por alguns autores como válidos em uma justificação (Lannin, 2005).

QUADRO SÍNTESE DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Discutidos os processos de Raciocínio Matemático, cada uma de suas características e como se relacionam, esquematizamos um quadro teórico sintetizando nossa compreensão sobre eles (Quadro 1).

Quadro 1 - Processos de Raciocínio Matemático

Categoria	Processo	Descrição
Busca por semelhanças e diferenças	Conjectura	Afirmação potencialmente válida que oferece uma explicação sobre uma situação matemática. Requer processos relacionados à validação para alterar seu valor epistêmico.
	Generalização	Afirmação potencialmente válida que oferece uma explicação sobre um conjunto mais geral de objetos matemáticos. Requer processos relacionados à validação para alterar seu valor epistêmico.
	Identificação de padrões	Infere uma relação recursiva sobre objetos matemáticos. Pode desencadear outros processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças.
	Classificação	Processo que agrupa objetos matemáticos de acordo com suas características comuns. Pode desencadear outros processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças.
	Comparação	Processo que estabelece semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos por analogia. Pode desencadear outros processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças.
Busca por semelhanças e diferenças/Validação	Exemplificação	Construção de exemplos ou contraexemplos que auxiliam na busca por semelhanças e diferenças ou na validação de afirmações. Pode desencadear outros processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças ou dar suporte a uma justificação.
Validação	Justificação	Processo que permite modificar, explicitando os motivos, o valor epistêmico de uma afirmação.
	Prova	Processo estruturado dedutivamente que modifica o valor epistêmico de uma afirmação, apoiando-se em resultados prévios já aceitos e apropriados pela comunidade em questão.

Fonte: Autoria própria

Neste quadro, buscamos uma definição suscinta dos processos de Raciocínio Matemático. Portanto, pode ser que elementos importantes de cada um deles não seja contemplado, visto que o nosso objetivo é fazer uma síntese dos processos e suas características mais importantes. Nos processos ligados à busca por semelhanças e diferenças, foram elencadas a generalização, a conjectura, a identificação de padrões, a classificação e a comparação. A prova e a justificação são processos ligados à validação. E, por sua vez, a exemplificação se relaciona com a validação e com a busca por semelhanças e diferenças.

Compreendemos que a comparação, a classificação e a identificação de padrões são processos de Raciocínio Matemático que permitem reunir elementos para que se possam produzir afirmações. Estamos adotando, também, que uma afirmação é o resultado de uma conjectura ou de uma generalização. Assim, os processos referidos servem como suporte para a produção dessas afirmações.

A conjectura e a generalização são processos que resultam em afirmações potencialmente válidas. Desse modo, elas criam a necessidade de processos relacionados à validação. Além disso, assumimos que uma generalização pode ser elaborada de duas maneiras distintas. Pode ser empírica, construída com base em casos particulares, ou teórica, construída a partir da atribuição de um modelo com base em estruturas matemáticas. Contudo, para manter a organização e o caráter de síntese do quadro, tais aspectos não são nele exibidos.

O mesmo ocorre com a justificação, que possui alguns níveis de formalidade. Entendemos que ela pode ser elaborada com base na autoridade, com base em casos particulares ou ter uma estruturação dedutiva com base em um caso particular (Lannin, 2005; Mata-Pereira, 2018). Pensamos que, se uma justificação vai além disso, tendo estruturação dedutiva sem se basear em casos particulares, ela pode ser entendida como uma prova.

Claramente, o termo prova que utilizamos não se refere a uma prova formal da matemática acadêmica, uma demonstração. É uma prova no contexto da matemática escolar. Ou seja, uma prova que é acessível aos alunos. Assim, apesar de serem os processos que possuem os mecanismos de modificar o valor epistêmico das afirmações, a prova e a justificação não são a mesma coisa. A prova requer que se sejam convocados resultados prévios, já aceitos pelos alunos, para compor sua construção final, de natureza dedutiva.

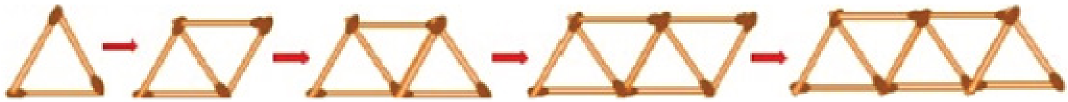
EXEMPLOS

A fim de enriquecer a discussão sobre os processos de Raciocínio Matemático, buscamos ilustrá-los com exemplos de tarefas presentes em outros trabalhos sobre o tema, nos quais é possível identificar a mobilização destes processos. Entendemos que, muitas vezes, a leitura das definições dos processos de Raciocínio Matemático pode não esclarecer suficientemente o professor, até mesmo porque quando o aluno resolve uma tarefa matemática, esses processos são mobilizados em conjunto, em que um pode dar suporte a outro, contribuindo para a aprendizagem matemática dos alunos. Por isso trazemos, na sequência, três tarefas matemáticas e trechos de resolução feita por alunos dessas tarefas, nos quais encontramos evidência da mobilização dos processos de Raciocínio Matemático.

Tarefa dos palitos

Na tarefa descrita a seguir, alunos do 2º ano do Ensino Médio organizados em trios deveriam responder, entre outras, as seguintes questões: "(a) representar a 6ª e a 7ª figuras desta sequência; (b) determinar o total de palitos da 12ª figura [...] (d) determinar o total de palitos da 29ª figura [...] (f) determinar a posição, na sequência, da figura com 101 palitos" (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 363).

Figura 1 - Tarefa dos palitos



Fonte: Araman, Trevisan e Paula (2022, p. 363).

No trecho a seguir, é possível identificar os processos de identificação de padrões e de conjectura de um dos grupos de alunos:

> *Professora: Como vocês fizeram?*
>
> *Aluno D: Ah, fizemos pela lógica, tipo: sabíamos que a 5ª figura tinha 11 [palitos]. Então, descobrimos que a razão era 2, porque a figura aumentava 2 palitos. Daí nós colocamos 11+2 e depois que achamos o resultado colocamos mais 2, daí achamos o resultado. Daí, achamos o 6º e o 7º [termos]. E na 'b' era para achar a 12ª figura. A gente sabia que a 6ª [figura] era 13, então 12 tinha que ser o dobro, então a gente fez 13 vezes 2, praticamente isso.*
>
> *[...] Professora: Aqui, é isso mesmo que acontece? Vamos visualizar a figura 2. Quantos palitos aqui?*
>
> *Aluno D: 5.*
>
> *Professora: Então você teria que pensar que a figura 4 é o dobro dessa, o que seria o dobro disso? Quantos tem na figura 4?*
>
> *Aluno D: Nossa, é verdade... (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 364-365).*

Após o momento em que o aluno relata que "fizeram pela lógica", ele descreve a identificação do padrão realizada pelo grupo. Os alunos identificam que cada figura tem 2 palitos a mais que a anterior. Isso permite aos alunos darem uma resposta à primeira questão, adicionando dois à 5ª figura para determinar o número de palitos da 6ª figura e, depois, da 7ª figura, de maneira recursiva.

Para determinar o número de palitos da 12ª figura, os alunos não utilizam a mesma estratégia. Em vez de determinar o número de palitos de cada figura, eles produzem uma conjectura: se a figura 6 possui 13 palitos, a figura 12, dobro de 6, deveria ter o dobro de palitos da figura 6. Nas palavras do aluno D: "a 6ª era 13 [figuras], então 12 tinha que ser o dobro" (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 364).

A identificação de padrões foi o primeiro processo de Raciocínio Matemático mobilizado nessa tarefa. Depois, os alunos produziram uma conjectura que só foi possível devido à identificação do padrão. Portanto, essa tarefa é um exemplo de que o processo de identificação de um padrão pode levar à produção de uma conjectura (Stylianides, 2009).

É importante perceber que, sendo a quantidade de palitos e a ordem do termo, podemos determinar a quantidade de palitos de qualquer figura por P = 3 + 2(n-1). Desse modo, para a 12ª figura, temos P = 3+2(12-1) = 3+22 = 25. Esse fato invalida a conjectura produzida pelos alunos. Eles percebem isso quando a professora pede que confrontem o número de palitos da figura 2 com os da figura 4. Mas é importante destacar que a conjectura, mesmo não sendo válida, tem potencial para desencadear outros processos de Raciocínio Matemático se investigada mais a fundo (Lannin; Ellis; Elliot, 2012; Mata-Pereira, 2012). Nos trechos seguintes, os alunos buscam determinar o número de palitos da 29ª figura:

> *Aluno D: A cada número de palitos é o dobro de posições. Porque a cada uma posição aumenta 2. [...] Dá 8 posições... 16 palitos.*
>
> *Aluno E: Dá pra escrever que a cada 2 palitos aumentava uma posição, então como são 8 palitos aumenta 4 posições*
>
> *[...] Aluno E: Vou contar quantos palitinhos tem aqui... Tem 31 palitos na figura 15. Na figura 17 são 35 palitos, [pois] aumentaram 4 palitos.*
>
> *Aluno D: Da figura 17 para 29 dá quantos [termos]? 12 [termos/posições].*
>
> *Aluno E: Aumentaram 12 [posições].*
>
> *Aluno D: Então sabemos que, na figura 17 é 35, e a figura 12 é 25. Então será 17 com a 12. [Ou seja], 35+25? Dá 60.*
>
> *[...] Professora: Vocês acham que 60 é um número razoável para ser a quantidade de palitos ou...*
>
> *Aluno E: Acho que não é, por causa da sequência, sempre chega uma parte que dá 21 [por exemplo, referindo-se ao fato de ser ímpar]. Então, no caso, seria 61...*
>
> *Aluno D: Nunca tem um número par na sequência, por isso que não pode ser 60...*
>
> *Aluno E: A gente sabe que vai ter uma figura que vai dar 101, então provavelmente vai ter um 11, 21, 31, 41 (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 366).*

Após abandonarem a primeira conjectura, os alunos formularam outra afirmação: a "cada número de palitos é o dobro de posições" (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 366). Em outras palavras, o número de palitos era o dobro da ordem do termo. Dada a generalidade dessa afirmação, ela tinha potencial para uma generalização. No entanto, os alunos concluíram que o número de palitos do da 29ª figura era 60, a soma dos números de palitos das figuras 12 e 17, que eram 25 e 35, respectivamente. O número de palitos das figuras 12 e 17 foi determinado recursivamente, por sua vez, somando 2 palitos à figura anterior.

Quando questionados pela professora, os alunos percebem que a afirmação que produziram não era válida. Eles refutam a própria afirmação argumentando que nunca "tem um número par na sequência" (Araman; Trevisan; Paula, 2022, p. 366). Considerando isso, podemos concluir que, refutando uma afirmação, os alunos produziram uma justificação (Stylianides, 2009; Lannin; Ellis; Elliott, 2011; Jeannotte; Kieran, 2017).

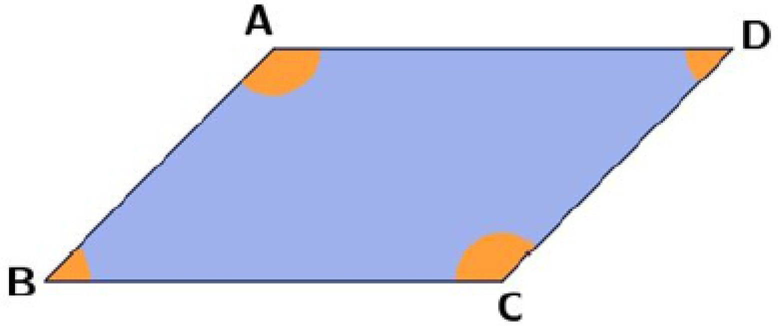
Além disso, o aluno E menciona que existe uma figura com 101 palitos. Ele sabe disso porque uma questão pede que se determine a posição da figura que terá tal quantidade de palitos. Ao se referir a tal fato, o aluno infere que existirão outras figuras com quantidades de palitos como 11, 21 ou 31. Desse modo, o aluno realizou o processo de comparação, já que identificou, por analogia, uma semelhança entre objetos matemáticos.

Tarefa sobre os ângulos internos de um paralelogramo

Silva, Vieira e Imafuku (2024) também obtiveram resultados interessantes ao analisarem uma tarefa sobre geometria. Os autores propuseram a tarefa mostrada na figura 2 a alunos de 1º e 2º anos do Ensino Médio.

Figura 2 - Ângulos internos de um paralelogramo

Determine os ângulos internos do paralelogramo ABCD destacado a seguir sabendo que a medida de cada ângulo obtuso é o dobro da soma dos ângulos agudos. Justifique seu raciocinio



Fonte: Silva, Vieira e Imafuku (2024, p. 8).

De acordo com os pesquisadores, foi possível identificar diversos processos de Raciocínio Matemático que foram empregados pelos alunos na resolução da tarefa, tais como classificação, comparação, conjectura, justificação e generalização (Silva; Vieira; Imafuku, 2024). A resolução de um aluno, em particular, permite exemplificar alguns processos:

> No paralelogramo ABCD temos 4 lados, assim pelo meu raciocínio, talvez estou errado, mas penso que a soma dos ângulos será 360°, como acontece no quadrado e no retângulo, por exemplo. Uma forma que pensei foi gerar um valor qualquer para os ângulos A e C, depois multiplicar por 2, que seria o resultado dos ângulos B e D. Com isso, obtive o seguinte resultado A = 60° e C = 60, multiplicando um ângulo por 2 obtive B: 120° e D: 120°, somando todos os ângulos obtive: 120° + 120° + 60° + 60° = 360° (Silva; Vieira; Imafuku, 2024, p. 14).

O aluno, em primeiro lugar, destaca que o paralelogramo possui 4 lados, assim como o quadrado e o retângulo, mobilizando o processo de comparação (Silva; Vieira; Imafuku, 2024) e, no nosso entendimento, também o processo de classificação, por agrupar elementos com características em comum. A partir disso, conjectura que, assim como nas demais figuras, a soma dos ângulos internos do paralelogramo é igual a 360°.

O aluno toma a conjectura como válida, sem verificar a necessidade de apresentar uma justificação, e a utiliza para responder a tarefa. Nesse momento, ele toma valores arbitrários para os ângulos (Silva; Vieira; Imafuku, 2024), concluindo que A e C são iguais a 60°, enquanto B e D são iguais a 120°, explicitando são o dobro de 60°. O aluno fornece uma justificação baseada em um caso particular: "somando todos os ângulos [...] 120°+120°+60°+60° = 360°" (Silva; Vieira; Imafuku, 2024, p. 14).

O paralelogramo representado leva a crer que os ângulos agudos são B e C, o que torna a resposta do aluno incorreta. No entanto, considerando somente o enunciado do exercício, a resposta é válida, já que ele não fixa quais são os ângulos agudos e obtusos. Mas também é possível que o aluno tenha percebido mal a representação pictórica.

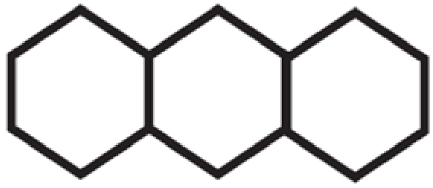
Do ponto de vista dos processos de Raciocínio Matemático, pode notar-se que a comparação e a classificação desencadearam, mais uma vez, a produção de uma conjectura. Os dois primeiros processos reuniram elementos que possibilitaram ao aluno declarar a conjectura, afirmando que o paralelogramo possui a soma de seus ângulos internos iguais a 360°, tal como o quadrado e o retângulo. Também destacamos a falta da justificação para essa conjectura. Apesar de ser sabido que tal afirmação é verdadeira, a simples aceitação dela sem buscar por validação demonstra que os alunos não se preocupam em dar justificativas para suas conjecturas (Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019).

O problema dos hexágonos

O emprego de certos processos de Raciocínio Matemático também pode ser verificado em Stylianides (2019), cuja tarefa é apresentada na figura 3.

Figura 3 - Problema dos hexágonos

Mark tem alguns hexágonos. Os lados dos hexágonos são todos de mesmo comprimento e iguais a **1 cm**. Mark coloca os hexágonos em fileiras para criar trens de diferentes tamanhos. Abaixo, está o Trem 3, que é formado por 3 hexágonos em fileira:



1. Qual é o perímetro do Trem 3?
2. Qual é o perímetro do Trem 100, que é formado por 100 hexágonos em fileira? **Prove sua resposta.**
3. Você consegue encontrar uma expressão que fornece o perímetro do Trem N, que é formado por N hexágonos em fileira? **Prove sua resposta.**

Fonte: Stylianides (2019, p. 165).

Em seu estudo, Stylianides (2019) discute dados oriundos de tarefas realizadas com alunos de 14 e 15 anos. A da tarefa da figura 3 foi escolhida pela sua importância matemática, já que favorece a produção de uma generalização, em especial de natureza teórica (Stylianides, 2019). Eis a descrição de um aluno sobre como ele raciocinou para resolver a tarefa:

> Não importa quão longa a corrente [trem] é, você sempre terá esses dois gomos finais [ele desenha um círculo ao redor do primeiro e do último hexágonos]. Em cada gomo, você terá 5 lados, então você terá '+10', porque eles são 10 [indicando que ele contou os lados do primeiro e do último hexágonos que contribuem para o perímetro do trem]. E isto é um trem de três, então para ter aquele gomo do meio você precisa fazer 'n-2', então em cada gomo do meio há 4 lados, então você multiplica por 4. [Enquanto fala ele escreve '4(n–2) + 10' no quadro] (Stylianides, 2019, p. 174).

Ao analisarmos a fala do aluno, é possível perceber que ele apresentou um alto nível de complexidade no seu Raciocínio Matemático. O aluno desenvolveu uma generalização e uma justificação. Ele descreve a generalização ao mesmo tempo em que apresenta os motivos pelos quais ela se sustenta.

Primeiro, o aluno percebe que, seja qual for o número de hexágonos adotado, sempre haverá dois hexágonos nas extremidades que terão cinco de seus lados considerados no cálculo do perímetro total da figura. Os hexágonos que estão entre esses dois das pontas têm quatro de seus lados considerados no cálculo do perímetro. Portanto, o número de hexágonos deve ser multiplicado por 4, mas desconsiderando os dois que estão na ponta. É dessa forma que o aluno chega ao seu modelo: $4(n-2) + 10$. Tal modelo, devido ao modo como foi construído, atribuído a partir da construção de estruturas matemáticas, constitui uma generalização de caráter teórico (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008; Mata-Pereira, 2018; Stylianides, 2019).

Além disso, quando o aluno explica em detalhes o modo como construiu sua generalização, o modo como obteve e atribuiu seu modelo à situação observada, expõe os motivos pelos quais ela é válida. O aluno faz isso quando cita, por exemplo, que, cada hexágono da ponta "terá 5 lados, então você terá +10 [...], se [o hexágono do meio] é um trem de três, [...] você precisa fazer (n-2), [que] cada [hexágono] do meio terá quatro lados, então multiplica por 4" (Stylianides, 2019, p. 174). Tal argumentação do aluno, além de ser uma justificação válida, tem potencial para se configurar como uma prova, mas precisaria ser reestruturada dedutivamente e de modo a explicitar os conhecimentos prévios utilizados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Raciocínio Matemático, apesar de ser descrito de modo pouco claro em documentos curriculares oficiais de muitos países (Jeannotte; Kieran, 2017), ganhou destaque no Brasil com a publicação da BNCC (Brasil, 2018). O documento prevê na etapa do Ensino Médio uma competência específica que carrega elementos do Raciocínio Matemático. Tal competência prevê que se deve trabalhar a matemática de modo a investigar e estabelecer conjecturas, identificando a necessidade de provar com formalidade cada vez maior.

Além disso, o entendimento sobre o Raciocínio Matemático em pesquisas da área da Educação Matemática nem sempre é uniforme. Nesse trabalho, formamos o entendimento de que o Raciocínio Matemático ocorre ao utilizar informação matemática já conhecida para obter novas informações matemáticas (Araman; Serrazina, 2020; Mata-Pereira; Ponte, 2017, 2018; Morais; Serrazina; Ponte, 2018; Ponte; Mata-Pereira; Henriques, 2012).

Destacam-se dois aspectos no Raciocínio Matemático: o estrutural e o processual. O primeiro se refere ao Raciocínio Matemático como podendo ser dedutivo, indutivo e abdutivo. O primeiro é fundamental na matemática e se desenvolve do geral para o particular (Mata-Pereira, 2012; 2018). Os raciocínios indutivos e abdutivos se relacionam com aspectos menos formais da matemática, mas não menos relevantes para a sua construção. No raciocínio indutivo passa-se do particular para o geral (Rivera, 2008), enquanto o abdutivo é a inferência de uma explicação para certas evidências (Aliseda, 2003).

Outro modo de olhar para o Raciocínio Matemático é a partir de seus processos. Eles dividem-se em duas categorias: os que estão relacionados à busca por semelhanças e diferenças e os que estão relacionados à validação (Jeannotte; Kieran, 2017). Na primeira categoria, elencamos, neste trabalho, a conjectura, generalização, identificação de padrões, comparação e classificação. Os processos ligados à validação são a justificação e prova. A exemplificação, por sua vez, é um processo que pode auxiliar tanto na busca por semelhanças e diferenças quanto na validação.

Cada processo de Raciocínio Matemático possui suas características, que foram debatidas neste trabalho. No entanto, vale um realce para a conjectura e a generalização, bem como para a justificação e a prova. Como mencionamos, o raciocínio dedutivo é o que caracteriza a matemática como campo de estudo. Por isso destacamos os processos de justificação e prova. Caso se busque formar alunos que se interessem por fazer matemática, não apenas realizar cálculos, eles devem ter a oportunidade de experimentar a atividade de argumentar a favor de uma ideia, a fim de fornecer uma justificação e, se possível, uma prova.

Por outro lado, a conjectura e a generalização compõem um aspecto da matemática que nem sempre é conhecido. Resultados obtidos por matemáticos profissionais são apresentados à sua comunidade na forma de demonstrações. Estas, por sua vez, não mostram o processo que percorreram para obter tal resultado. Isso não importa nesse contexto. Mas no contexto de uma matemática produzida na escola, importa. Interessa aos professores saber os caminhos que seus alunos percorrem para obter seus resultados. Interessa saber se houve a compreensão de conceitos matemáticos durante a produção desses resultados.

Desse modo, a conjectura e a generalização são processos relacionados à criação na matemática. São processos nos quais são germinadas as ideias. É claro que eles não existem, ou não deveriam existir, apartados dos processos de validação. Sempre que possível uma generalização deve ser justificada. Essa combinação de processos de Raciocínio Matemático tem grande relevância ao explicitar os conhecimentos matemáticos dos alunos.

Esperamos que as discussões aqui apresentadas contribuam para o entendimento do leitor quanto aos processos de Raciocínio Matemático. Idealmente, toda atividade matemática deveria ter como objetivo justificar uma generalização, o que nem sempre ocorre nas salas de aula. Também esperamos que a síntese dos processos de Raciocínio Matemático em um quadro e a sua exemplificação em trabalhos da área possam ser úteis a professores e pesquisadores que tenham interesse na área.

REFERÊNCIAS

ALISEDA, Atocha. Mathematical reasoning Vs. Abductive reasoning: a structural approach. **Synthese**, v. 134, n. 1-2, 2003.

ARAMAN, Eliane; CORRÊA, Lucas; BARROS; Ketheryn; SERRAZINA, Lurdes. “Quando nós tiramos 1, temos que pôr 1...”: ações que apoiam o raciocínio matemático desempenhadas por uma professora ao discutir uma tarefa de adição. **EMP**, v. 25, n. 1, 2023.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, v. 34, n. 67, 2020.

ARAMAN, Eliane; SERRAZINA, Lurdes. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias do 3º ano de escolaridade. **RPEM**, v. 9, n. 18, 2020.

ARAMAN, Eliane; TREVISAN, André; PAULA, Bruna. Raciocínio Matemático Apoiado por Tarefas Exploratórias e Ações dos Professores. **Alexandria**, v. 15, n. 1, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRODIE, Karin. **Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School**. Nova Iorque: Springer, 2010.

BRUNHEIRA, Lina. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos Primeiros Anos**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019.

BRUNHEIRA, Lina; PONTE, João. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Bolema**, v. 33, n. 63, 2019.

CAÑADAS, María; DEULOFEU, Jordi; FIGUEIRAS, Lourdes; REID, David; YEVDOKIMOV, Oleksiy. The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. **Journal of Teaching and Learning,** 2007.

CARRAHER, David; MARTINEZ, Mara; SCHLIEMANN, Analúcia. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM**, v. 40, n. 1, 2008.

CHIMONI, Maria; PITTA-PANTAZI, Demetra; CHRISTOU, Constantinos. Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. **Educ Stud Math**, v. 98, n. 1, 2018.

GALBRAITH, Peter. Mathematics as Reasoning. **The Mathematics Teacher**, v. 88, n. 5, 1995.

GROSS, Giane; TREVISAN, André; ARAMAN, Eliane. Raciocínio matemático e as oportunidades de aprendizagem profissional do professor que ensina matemática: as ações do formador. **Eduser**, v. 16, n. 2, 2024.

HANNA, Gila. Proof, Explanation and Exploration: an overview. **Educ Stud Math**, v. 44, n. 1-3, 2000.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 2017.

LANNIN, John; ELLIS, Amy; ELLIOTT, Rebekah. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

LANNIN, John. Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 7, n. 3, 2005.

MATA-PEREIRA, Joana. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, Joana. **O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 2017.

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, 2018.

MAZZI, Lucas; AMARAL-SCHIO, Rúbia. Diferentes tipos de raciocínio na Geometria dos Livros Didáticos de Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 32, 2020.

MEYER, Michael. Abduction – A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. **Educ Stud Math**, v. 74, n. 2, 2010.

MORAIS, Cristina; SERRAZINA, Lurdes; PONTE, João. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

MORAIS, Rosimeiri; ARAMAN, Eliane; TREVISAN, André. Raciocínio matemático e argumentação em tarefas de geometria plana nos anos iniciais. **Vidya**, v. 42, n. 2, 2022.

MOREIRA, Plínio; DAVID, Maria. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **J Math Teacher Educ**, v. 11, n. 1, 2008.

MOREIRA, Plínio; DAVID, Maria. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, v. 11, n. 19, 2003.

PEDEMONTE, Bettina. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? **Educ Stud Math**, v. 66, n. 1, 2007.

PONTE, João; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PONTE, João; MATA-PEREIRA, Joana; HENRIQUES, Ana. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, 2012.

PONTE, João; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 2, n. 156, 2020.

RIVERA, Ferdinand; BECKER, Joanne. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teaching in Middle School**, v. 15, n. 4, 2009.

RIVERA, Ferdinand. On the pitfalls of abduction: complicities and complexities in patterning activity. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n. 1, 2008.

SILVA, Thiago; VIEIRA, William; IMAFUKU, Roberto. Processos do raciocínio matemático evidenciados por estudantes do Ensino Médio na resolução de problemas de Geometria Plana. **Ridema**, v. 8, n. 1, 2024.

STYLIANIDES, Andreas. Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. **Review of Education**, v. 7, n. 1, 2019.

STYLIANIDES, Gabriel. An analytic framework of reasoning-and-proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n. 1, 2008.

STYLIANIDES, Gabriel. Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. **Mathematical Thinking Learning**, v. 11, n. 4, 2009.

TREVISAN, André; ARAMAN, Eliane. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. **Bolema**, v. 35, n. 69, 2021.

TREVISAN, André. Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias. **RBECT**, Edição Especial, 2022.

VIEIRA, William; RODRIGUES, Margarida; SERRAZINA, Lurdes. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, v. 29, n. 1, 2020.